

Copyright 2004, Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás - IBP

Este Trabalho Técnico Científico foi preparado para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, a ser realizado no período de 2 a 5 de outubro de 2005, em Salvador. Este Trabalho Técnico Científico foi selecionado e/ou revisado pela Comissão Científica, para apresentação no Evento. O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pelo IBP. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões do Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás, Sócios e Representantes. É de conhecimento e aprovação do(s) autor(es) que este Trabalho será publicado nos Anais do 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM ESTRUTURA DE DADOS POR ARESTAS APLICADO ÀS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS

Alessandro R. E. Antunes¹, Paulo R. M. Lyra², Silvana M. Bastos³
Universidade Federal de Pernambuco, Acadêmico Hélio Ramos s/n, Recife-PE

¹ aantunes @demec.ufpe.br

² prmlyra @demec.ufpe.br

³ smb @ufpe.br

Resumo – O objetivo deste trabalho é estudar e implementar uma formulação numérica para o tratamento de problemas envolvendo escoamentos incompressíveis regidos pelas equações de Navier-Stokes. A formulação numérica é baseada nas propriedades de estabilização da pressão do “Fractional Step Method” aplicado às equações de Navier-Stokes incompressíveis. As equações resultantes são discretizadas no espaço aplicando-se o método dos elementos finitos com uma estrutura de dados baseada nas arestas. O método dos elementos finitos utilizando-se uma estrutura de dados por arestas é atrativo tanto do ponto de vista de eficiência computacional quanto do ponto de vista numérico, pois além de ser computacionalmente mais econômica, tem a propriedade de garantir a conservação local e a simetria em nível discreto. Alguns resultados numéricos preliminares são apresentados como exemplos.

Palavras-Chave: MEF; Navier-Stokes Incompressível; Estrutura de Dados por Aresta

Abstract – The aim of this work is to implement a numerical formulation to deal with Incompressible Navier-Stokes Equations. This formulation is based on the pressure stability properties of a Fractional Step Method. The final governing equations are discretized by an Edge Based Finite Element Method. The Edge Based discretization is advantageous due to the reduction in the total CPU time and the enforcement of local conservation and symmetry at the discrete level. Some numerical examples are presented.

Keywords: FEM, Incompressible Navier-Stokes, Edge Based Data Structure

1. Introdução

Muitos fenômenos na natureza envolvendo escoamentos fluidos são modelados como incompressíveis, o que significa que, são necessárias enormes pressões para causar significativas variações de suas massas específicas. Na indústria, estes fenômenos manifestam-se em vários setores, e ainda, acoplados a outros fenômenos, tais como interações fluido-estruturais em cabos de força, edificações altas, torres de telefonia, aviões, cabos submarinos, estruturas “off-shore” em plataformas de petróleo, etc. Nas últimas décadas, diversos procedimentos numéricos vêm sendo utilizados para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis, como: esquemas monolíticos, compressibilidade artificial, pré-condicionamento das equações de Navier-Stokes compressíveis e métodos de projeção, todos eles com suas vantagens e desvantagens.

Este trabalho baseia-se em um método de projeção, utilizando o fracionamento das equações de Navier-Stokes (Chang et al. 2002, Codina, 2001, Perot, 1993, Henriksen and Holmen, 2002) de forma a estabilizar a pressão, gerando novas variáveis e equações que devem ser adicionadas ao sistema final. O fracionamento é obtido mediante uma fatoração LU do sistema, através de considerações matemáticas. Porém pode ser visto também como uma projeção do gradiente de pressão no espaço de Elementos Finitos, através de considerações físicas. A discretização espacial é obtida mediante a aplicação do método dos Elementos Finitos (Codina, 1997, Gresho vol 1 and vol 2, 1998), e cada termo do sistema resultante é escrito como uma contribuição da aresta (Löhner, 2001), com a finalidade de obter economia de tempo computacional e tomar vantagem das propriedades de conservação local e simetria em nível discreto.

2. Formulação Matemático-Numérica

As equações de Navier-Stokes escritas na sua forma incompressível (Gresho, vol 1 and vol 2, 1998) são fracionadas utilizando-se o “Fractional Step Method” (Henriksen, 2002) de forma a permitir o desacoplamento das variáveis de pressão e velocidade sem inviabilizar a solução segregada do sistema (Codina, 2002, Codina and Soto, 2004). O termo convectivo e o gradiente de pressão são estabilizados utilizando-se a projeção ortogonal destes termos no espaço de elementos finitos, o que na prática implica em controlar o resíduo mediante a aplicação do método dos resíduos ponderados, o que está apresentado no quinto e segundo termos das Equações 1 e 2, respectivamente.

A formulação variacional (Soto et al. 2001, Soto et al. 2004) do problema pode ser descrita como: dado $\mathbf{u}_h^n$ e p_h^n , encontrar $(\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\pi}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1})$ em $\mathbf{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1,i} - \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \mathbf{v}_h) + (v \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \nabla \mathbf{v}_h) - (p_h^{n+1,i-1}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\ + (\tau (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i} - \boldsymbol{\pi}_h^{n+\theta,i-1}) \mathbf{u}_h^{n+\theta,i-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v}_h) + (\boldsymbol{\sigma}^{n+\theta,i-1} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_h)_{\Gamma_{nu}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta (\nabla p_h^{n+1,i} - \nabla p_h^{n+1,i-1}, \nabla q_h) + (\tau (\nabla p_h^{n+1,i} - \beta^{n+1,i-1} \boldsymbol{\xi}_h^{n+1,i-1}), \nabla q_h) = -(\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}, q_h) \quad (2)$$

$$(\boldsymbol{\pi}_h^{n+\theta,i}, \tilde{\mathbf{v}}_h) = (\mathbf{u}_h^{n+\theta,i} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta,i}, \tilde{\mathbf{v}}_h) \quad (3)$$

$$(\boldsymbol{\xi}_h^{n+1,i}, \tilde{\mathbf{v}}_h) = (\nabla p_h^{n+1,i}, \tilde{\mathbf{v}}_h) \quad (4)$$

$$\forall (\mathbf{v}_h, q_h, \tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$$

onde $\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\pi}_h^{n+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{n+1}$ são o vetor velocidade, a pressão, a projeção do termo convectivo e a projeção do gradiente de pressão no espaço de elementos finitos, respectivamente, e $\mathbf{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$ são os espaços vetoriais correspondentes às variáveis acima citadas, respectivamente. Os sobrescritos n e i referem-se ao passo de tempo e ao contador de iterações em cada passo de tempo, respectivamente, o subscrito h refere-se ao problema discreto, δt é o tamanho do passo de tempo, β é o parâmetro de estabilização controlado pelo gradiente de pressão, τ é o parâmetro que controla a estabilidade e a convergência do sistema, θ é o controlador da ordem da integração no tempo ($\theta = 1.0$ Backward Euler e $\theta = 0.5$ Crank-Nicholson), σ é o tensor viscoso, $\mathbf{f}$ é o vetor das forças externas aplicadas, Γ_{nu} é a porção do contorno com condições de contorno de Newman, v é a viscosidade dinâmica do fluido, e $\mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h, q_h$, são as funções de ponderação dos espaços de elementos finitos para a velocidade, as projeções da convecção e do gradiente de pressão e da pressão, respectivamente. Temos ainda a forma funcional $(\cdot, \cdot)$, definida como

$$(a, b) = \int_{\Omega} a \cdot b d\Omega \quad (5)$$

$$(a, b)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} a \cdot b d\Gamma \quad (6)$$

As variáveis π e ξ são auxiliares e não necessitam condições de contorno e iniciais.

As matrizes resultantes da discretização espacial por elementos finitos são obtidas mediante uma estrutura de dados por arestas (Löhner, 2001), que tem como principal vantagem sobre uma estrutura baseada nos elementos, o ganho de tempo computacional, pois muitos termos discretos e todas as integrações numéricas são computadas no início, como pré-processamento, e apenas algumas poucas operações necessitam ser implementadas para que sejam re-computados os diferentes termos não-lineares dos vetores do sistema. Também, através de uma implementação por arestas, é possível garantir a conservação local e a simetria em nível discreto. Duas formas de estrutura de dados por arestas podem ser implementadas e comparadas no caso bidimensional, sendo uma delas a estrutura tradicional, onde o *loop* é feito na aresta e nos nós que compõem tal aresta, e outra, uma estrutura alternativa, tipo estrela, onde o *loop* é realizado nos nós e, a seguir, nos nós que têm conectividade com aquele nó. Em termos de eficiência computacional, nenhuma das duas estruturas apresenta vantagem sobre a outra, e, de modo que neste trabalho optou-se pela tradicional, ou seja, o *loop* é realizado nas arestas considerando um termo típico do sistema de equações 1-4.

A seguir é apresentado, de forma simplificada, como é realizada a mudança de estrutura de dados, partindo do termo contínuo para o termo discreto com *loop* nos elementos e modificando para *loop* nas arestas.

Seja então o primeiro termo da Equação 2, que possui caráter de transporte difusivo, eliminando os sub/super-índices por simplicidade, e assumindo $E, S, I, J, IJ, k, n, \dim, \Omega, \Omega_E, x_k, m, \sum_{E \ni I}, \sum_{E \ni IJ}, \sum_{S=1}^m$, referem-se a: elemento, aresta, nó inicial da aresta, nó final da aresta, direção coordenada, dimensão espacial, domínio total, domínio do elemento, coordenada espacial na direção k , número de arestas, somatório sobre todos os elementos que contém o nó I , somatório sobre todos os elementos que contém a aresta IJ , e somatório sobre todas as arestas, respectivamente.

$$\begin{aligned} ((\delta t) \nabla p, \nabla N) &= \int_{\Omega} (\delta t) \nabla p \cdot \nabla N d\Omega = \sum_{E \ni I} \int_{\Omega_E} (\delta t) \nabla N_I \cdot \nabla N_J d\Omega_E \hat{p}_I = \\ &= \sum_{S=1}^m \left((\delta t) \sum_{E \ni IJ} \int_{\Omega_E} \nabla N_I \cdot \nabla N_J d\Omega_E \right) (\hat{p}_I - \hat{p}_J) = \\ &= \sum_{S=1}^m \left\{ (\delta t) \sum_{E \ni IJ} \int_{\Omega_E} \left(\sum_{k=1}^{n \dim} \frac{\partial N_I}{\partial x_k} \frac{\partial N_J}{\partial x_k} \right) d\Omega_E \right\} (\hat{p}_I - \hat{p}_J) = \sum_{S=1}^m C_{IJ} (\hat{p}_I - \hat{p}_J) \end{aligned} \quad (7)$$

onde C_{IJ} é o coeficiente associado á aresta IJ dado por

$$C_{IJ} = (\delta t) \sum_{E \ni IJ} \int_{\Omega_E} \left(\sum_{k=1}^{n \dim} \frac{\partial N_I}{\partial x_k} \frac{\partial N_J}{\partial x_k} \right) d\Omega_E \quad (8)$$

Note que o termo final da Equação 7 é naturalmente conservativo, mesmo em nível discreto, o que do ponto de vista físico significa que o transporte difusivo do ponto I para o ponto J é igual ao transporte difusivo do ponto J para o ponto I . Esta propriedade é garantida para todos os termos de cada equação do sistema resultante, fazendo com que os termos que não são naturalmente conservativos, tornem-se conservativos, obtendo os termos da diagonal principal de cada matriz resultante de cada termo do sistema, como a negativa da soma dos elementos que estão fora da diagonal principal, porém na mesma linha, sendo, portanto, garantida a conservação de todo o sistema em nível discreto (Soto *et al.* (2004)).

3. Aplicações Numéricas

Alguns exemplos numéricos foram obtidos para testar a formulação por arestas. Estes exemplos são simplificações do sistema completo que traduzem os principais fenômenos associados a escoamentos de fluidos incompressíveis. Nos exemplos a seguir considerou-se a temperatura como a grandeza escalar de interesse, então T , refere-se à temperatura, e desta forma v refere-se ao coeficiente de condutividade térmica.

3.1. Difusão Pura

Primeiramente, apenas o termo difusivo foi implementado, e alguns testes foram realizados para verificar a propriedade de conservação para problemas com coeficiente de condutividade constante, porém considerando problemas homogêneos e heterogêneos.

$$(v\nabla T, \nabla N) = \sum_{s=1}^{m_I} \left\{ v_{IJ} \left[\sum_{E \supset IJ} \int_{\Omega_E} \nabla N_I \cdot \nabla N_I d\Omega_E \right] (\hat{T}_I - \hat{T}_J) \right\} \quad (9)$$

$$v_{IJ} = \frac{v_I + v_J}{2} \quad (10)$$

Note que na Equação 9, o coeficiente de condutividade v precisa ser obtido sobre a aresta, o que não acarreta problemas se o problema for homogêneo, pois basta tomar o coeficiente na aresta como a média aritmética dos valores dos coeficientes nos nós que compõem tal aresta, como na Equação 10. Entretanto, quando o problema não é homogêneo, é preciso tomar cuidado para não tornar o termo não-conservativo, eliminando a principal característica do termo difusivo. Para esta situação, os termos da diagonal principal da matriz resultante da discretização, são a negativa da soma dos termos de fora da diagonal principal, na mesma linha. Com isso, a propriedade de conservação é mantida, e o termo difusivo fica válido para tratar problemas não homogêneos. A conservação é estendida aos termos não-conservativos do sistema obtendo-se sempre os termos da diagonal principal como a negativa da soma dos termos da mesma linha, desta forma a soma dos elementos de cada linha é zero.

Os dois exemplos a seguir foram obtidos com uma malha com 124 nós e 206 elementos triangulares, isotrópica, sobre uma geometria quadrada de aresta medindo $1m$.

A Figura 1 mostra os resultados obtidos para um problema referente a uma placa plana, com temperaturas prescritas nas faces leste e oeste de $T=10^\circ C$ e $0^\circ C$, respectivamente, e isolada nas faces norte e sul, ou seja, com fluxo normal zero e coeficiente de condutividade homogêneo. Como esperado, a solução é linear ao longo da linha A, e exata, mostrando a efetividade do termo difusivo escrito para a aresta. Este problema também foi resolvido através de uma implementação do termo difusivo baseado nos elementos, obtendo-se total concordância com a implementação por aresta.

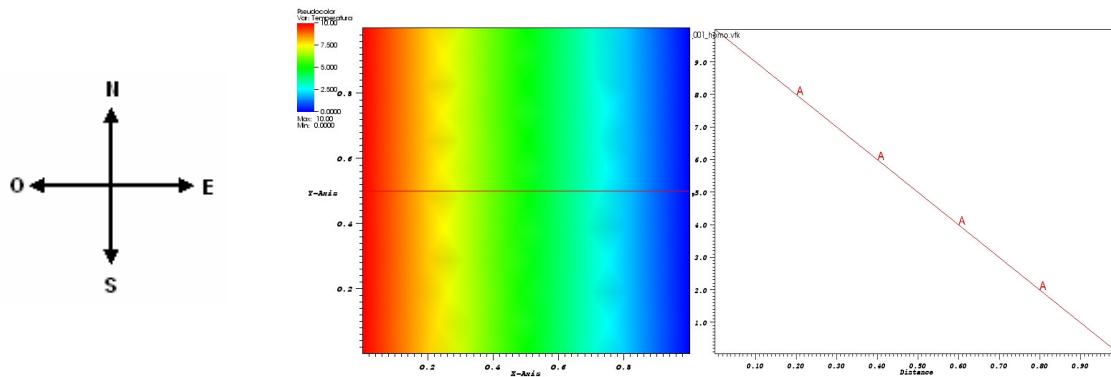


Figura 1. Transporte difusivo com homogeneidade no coeficiente de condutividade.

A Figura 2 mostra um exemplo considerando a mesma placa do exemplo anterior, com a mesma malha computacional e mesmas condições de contorno, porém com heterogeneidade no coeficiente de condutividade. Neste caso o coeficiente de condutividade na região que compreende uma faixa diagonal no centro do domínio é oito ordens de grandeza menor do que no restante do domínio, isto representa uma barreira ao transporte naquela região. Note no gráfico, ao longo da linha E, o elevado gradiente na região central do domínio, provocado pela baixa condutividade. Os vetores indicam o fluxo de calor ao longo da placa, mostrando que na região de baixa condutividade há pouco, ou quase nenhum, fluxo de calor.

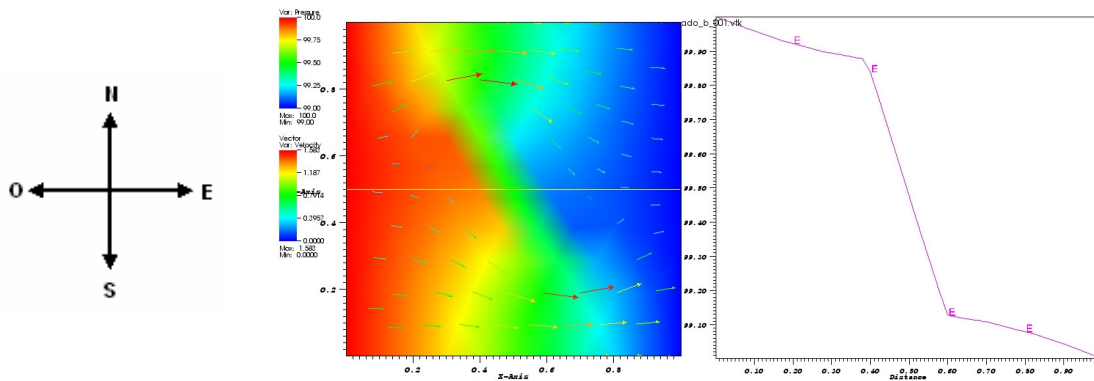


Figura 2. Transporte difusivo com heterogeneidade no coeficiente de condutividade.

3.2. Convecção-difusão

Após testar o termo difusivo, passamos para o problema onde os fenômenos convectivo e difusivo são importantes. Neste caso, ainda analisando o fluxo de calor ao longo de uma placa, realizamos testes considerando diferentes números de *Peclet*, considerando homogeneidade no coeficiente de condutividade. As mesmas condições de contorno foram assumidas, porém o domínio foi estendido até $120m$ para representar uma placa semi-infinita, permitindo assim a obtenção de soluções durante grandes intervalos de tempo. As Figuras 3 e 4 mostram um problema convectivo-difusivo considerando $Peclet = 0,5$, em diferentes instantes de tempo. Os resultados concordam com os resultados encontrados por Sun (1996), que considerou o transporte de um traçador em uma coluna de areia, representando um meio poroso. Os gráficos mostram a solução ao longo da linha média leste-oeste, BE, sendo o eixo horizontal a distância ao longo da placa, e o eixo vertical a temperatura.

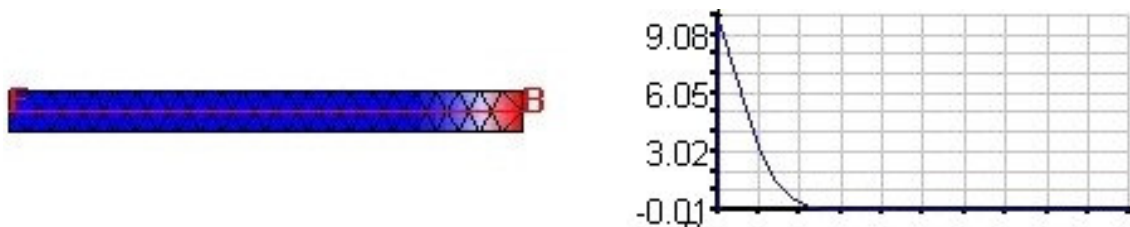


Figura 3. Convecção-difusão com $Peclet = 0,5$ no instante $t=5s$.



Figura 4. Convecção-difusão com $Peclet = 0,5$ no instante $t=50s$.

Os testes foram realizados apenas com pequenos números de *Peclet*, visto que a formulação é Galerkin, e a estabilização do termo convectivo, quinto termo da Equação 1, está em fase de implementação.

4. Conclusões

Uma formulação matemática para tratar escoamentos incompressíveis, baseada no fracionamento das equações de Navier-Stokes e no método dos elementos finitos com estrutura de dados por arestas, está em fase de testes da implementação computacional, sendo que os casos simplificados, como difusão pura e convecção-difusão de uma grandeza escalar, já foram validados, inclusive para meios heterogêneos. A estrutura de dados baseada nas arestas foi comparada com a estrutura tradicional de elementos finitos, mostrando-se eficiente em termos de precisão numérica. A formulação matemática já foi estendida para tratar fenômenos que envolvam fronteira móvel, que será o próximo passo a ser abordado.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao Governo Brasileiro, através das agências CAPES, CNPq e MCT-ANP pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho. Os autores também agradecem ao Prof. Dr. Ramiro B. Willmersdorf pelas valiosas discussões realizadas durante o desenvolvimento do mesmo.

Referências

- CHANG, W., GIRALDO, F., PEROT, B., Analysis of an exact fractional step method, J. Computational Physics, v. 180, p. 183-199, 2002.
- CODINA, R., BLASCO, J., A finite element formulation for the Stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolation, Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering, v. 143, p. 373-391, 1997.
- CODINA, R., Stabilization of incompressible and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods, Compt. Meth. Applied mechanics and Engineering, v. 190, p. 1579-1599, 2000.
- CODINA, R., Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows, J. Computational Physics, v. 170, p. 112-140, 2001.
- CODINA, R., Stability finite element approximation of transient flows using orthogonal subscales, Comp. Meth. Applied mechanics and Engineering, v. 191, p. 4295-4321, 2002.
- CODINA, R., SOTO, O., Approximation of the incompressible Navier-Stokes equations using orthogonal subscale stabilization and pressure segregation on anisotropic finite element meshes, Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering, v. 193, p. 1403-1419, 2004.
- GRESHO, P. M., SANI, R. L., Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons, v. 1, 1998.
- GRESHO, P. M., SANI, R. L., Incompressible flow and the finite element method, John Wiley & Sons, v. 2, 1998.
- HENRIKSEN, M. O., HOLMEN, J., Algebraic splitting for incompressible Navier-Stokes equations, J. Computational Physics, v. 175, p. 438-453, 2002.
- PEROT, J. B., An analysis of the fractional step method, J. Computational Physics, v. 108, p. 51-58, 1993.
- LÖHNER, R., Applied CFD techniques - An introduction based on finite element methods, John Wiley & Sons Ltd., 2001.
- SOTO, O., LÖHNER, R., CEBRAL, J., An implicit monolithic accurate finite element scheme for incompressible flow problems. In: 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, EUA, June, 2001.
- SOTO, O., LÖHNER, R., CEBRAL, J., CAMELLI, F. A stabilized edge-based implicit incompressible flow formulation, Comp. Meth. Applied Mechanics and Engineering, v. 193, p. 2139-2154, 2004.
- SUN, N., Mathematical modeling of groundwater pollution, Springer, 1996.