



Copyright 2004, Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás - IBP

Este Trabalho Técnico Científico foi preparado para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, a ser realizado no período de 2 a 5 de outubro de 2005, em Salvador. Este Trabalho Técnico Científico foi selecionado e/ou revisado pela Comissão Científica, para apresentação no Evento. O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pelo IBP. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões do Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás, Sócios e Representantes. É de conhecimento e aprovação do(s) autor(es) que este Trabalho será publicado nos Anais do 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás

UM MODELO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ABORDAGEM DE PROBLEMAS COM MATERIAIS NÃO-HOMOGÊNEOS

Carlos Friedrich Loeffler¹, Webe João Mansur²

¹ UFES, Av Fernando Ferrari s/n, Goiabeiras, Vitória, ES, carlosloeffler@ct.ufes.br

² COPPE/UFRJ, Cidade Universitária, Ilha do Fundão, RJ, webe@coc.ufrj.br

Resumo – Uma das maiores limitações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-homogêneo, casos estes muito comuns nas áreas de Geotecnia e Mecânica dos Solos. Nas situações em que a heterogeneidade é setorialmente localizada, o uso de sub-regiões consiste no recurso mais eficiente e utilizado. Em certas situações, entretanto, esta estratégia é insatisfatória, podendo tornar-se onerosa e inadequada. Na ausência de outras abordagens no acervo de recursos do MEC, resultava quase sempre na escolha de técnicas de discretização de domínio, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas, para tratar esta categoria de problemas. Utilizando-se da formulação com Quase-Dupla Reciprocidade, as características básicas da abordagem via MEC são mantidas, equacionando o modelo matemático integral e sua conseqüente discretização exclusivamente em termos de valores de contorno, sem necessidade de sub-regiões. A variação das propriedades ao longo das direções coordenadas é introduzida junto a cada elemento de contorno. Nenhuma restrição é imposta pela formulação quanto ao seu tipo ou ordem, garantindo a generalidade da abordagem. O desempenho da formulação é mostrado através da comparação da precisão dos resultados obtidos pela simulação numérica de dois problemas que possuem solução analítica disponível.

Palavras-Chave: Não-Homogeneidade, Método de Elementos de Contorno, Métodos Numéricos.

Abstract – One of the most serious problems of the Boundary Element Method is the simulation of non-homogeneous problems, very common in Geotechnics and Soil Mechanics. If the non-homogeneity is concentrated in domain parts, the most efficient Boundary Element resource is the use of Sub-regions. However, there are many applications where the non-homogeneity is distributed in which this tool is not suitable. Usually, Finite Element Method and other domain numerical techniques are chosen to simulate non-homogeneous problems. This paper presents a new Boundary Element Formulation, named Quasi-Dual Reciprocity, applied to Non-homogeneous Continuum Mechanics problems. The proposed formulation treats the non-homogeneous properties in a special way, allowing the establishment of a typical boundary element integral model, avoiding the use of sub-regions. As a result, the discretization procedure is limited to the external boundary. The performance is shown by comparison between numerical and analytical results, achieved with the computational simulation of two examples.

Keywords: : Non-homogeneous Problems, Boundary Element Method, Numerical Methods

1. Introdução

É bastante comum na engenharia a adoção de hipóteses simplificadoras que admitem as propriedades termomecânicas da maior parte dos materiais construtivos ou dos meios constituintes como homogêneas ao longo de toda a sua extensão. Essa consideração é adequada e aproximadamente verdadeira em muitos casos, onde a não-homogeneidade se situa num nível microscópico. É o caso dos aços e outros materiais metálicos: numa escala macroscópica é perfeitamente plausível considerar sua constituição e suas propriedades físicas como homogêneas. No entanto, existem exceções nesse elenco de materiais com ampla aplicação na engenharia.

O primeiro grupo consiste daqueles nos quais a interferência por processo de soldagem se faz presente. São casos muito comuns e que precisam ser adequadamente examinados. O processo de soldagem altera significativamente a microestrutura do material fazendo com que a hipótese de homogeneidade seja imprecisa. No entanto, é possível abordar esses casos através da técnica de sub-regiões, considerando setores de constituição física distinta.

Um segundo grupo consiste dos materiais compósitos. Atualmente uma boa parte dos materiais de engenharia modernos, de arrojada aplicação industrial, são materiais compósitos. Resumidamente, tais materiais são compostos por conjuntos de materiais constituintes, com diferentes propriedades térmicas, mecânicas e orientações geométricas. Uma vertente mais moderna desta classe consiste dos materiais com gradação de propriedades funcionais, conhecidos pela sigla FGMs (Sutradhar et al., 2002). Esta última categoria tem sido objeto de grandes incentivos e investimento em pesquisa, particularmente da NASA e de outras grandes empresas que lidam com empreendimentos arrojados. Os materiais funcionais podem combinar adequadamente as propriedades térmicas e mecânicas ao longo de sua extensão, permitindo ainda a obtenção de uma melhor ponderação entre peso e resistência ao desgaste.

Um terceiro grupo compõe-se de materiais tipicamente não homogêneos, seja em nível micro-estrutural, seja no plano da análise macroscópica. É o caso dos solos. O estudo das fundações de edifícios e estruturas em geral não dispensa o emprego de modelos que considerem a não-homogeneidade do meio contínuo. Essa área possui uma importante vertente: a análise sísmica. Muitas regiões sofrem constantemente a ação de terremotos e a análise dos seus efeitos sobre as estruturas, solos ou vias de comunicação, representam grandes desafios devido à complexidade dos fenômenos associados aos mecanismos de geração e propagação de ondas em meios heterogêneos. Sabe-se que é possível prever do ponto de vista teórico a resposta sísmica da cidade, utilizando uma modelação matemática adequada. Para tal torna-se necessário conhecer os vários parâmetros físicos associados às camadas geológicas e, em particular, à velocidade de propagação de ondas.

Aproveitando o conhecimento técnico e científico nesta área, uma outra aplicação similar tem ganhado enorme importância dentro da engenharia moderna: a modelagem geotécnica com vistas à prospecção de petróleo. Os princípios mecânicos empregados na análise sísmica podem ser completamente aproveitados na identificação de lençóis de petróleo, usando métodos matemáticos que ofereçam uma expectativa de resposta dinâmica sensível à sua presença. Em linhas gerais, são feitas experiências de campo nas quais se colhem respostas às excitações provenientes de explosões controladas. Fazendo simulações numéricas correlatas, pode-se inferir a existência e o posicionamento de lençóis petrolíferos por adequadas simulações numéricas. Naturalmente, em se tratando do emprego de métodos numéricos, é preciso haver uma boa representação matemática tanto da dinâmica do problema quanto da parte de modelagem da heterogeneidade do meio físico, pelo que se ocupa o presente trabalho.

2. Modelo Matemático

Considere um meio contínuo não-homogêneo, estacionário, no qual $d\Omega$ representa uma superfície infinitesimal e que as variáveis bidimensionais expressas por $\mathbf{X}=\mathbf{X}(x_1, x_2)$ descrevem sua posição com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. A equação de governo neste caso, considerando o equilíbrio e a compatibilidade de uma função escalar u , que genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar, é dada em notação indicial por:

$$[K(\mathbf{X})u(\mathbf{X})]_{,i} = 0 \quad (1)$$

Na última equação, $K(\mathbf{X})$ é uma função que representa a propriedade constitutiva do meio contínuo, dependente da posição ao longo do domínio bidimensional. As condições de contorno essenciais e naturais são definidas por:

$$u(\mathbf{X}) = \bar{u} \text{ para } \mathbf{X} \in \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (2)$$

$$K(\mathbf{X})u(\mathbf{X})_{,i} n_i(\mathbf{X}) = \bar{q} \text{ para } \mathbf{X} \in \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (3)$$

Nas equações 2 e 3, $\Gamma_u(\mathbf{X})$ e $\Gamma_q(\mathbf{X})$ representam as fronteiras do meio contínuo e $n_i(\mathbf{X})$ caracteriza o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos q adquire o significado de

tensão aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser interpretado como um fluxo imposto de energia difusiva.

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC consiste do estabelecimento da equação de governo numa forma integral, usando a solução fundamental $u^*(\xi; X)$ como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, onde foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = 0 \quad (4)$$

A aplicação do esquema de integração por partes e emprego do Teorema da Divergência na equação anterior permite reescrevê-la como:

$$\int_{\Gamma} Ku_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (5)$$

Usando a definição expressa na equação 3, pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (6)$$

Aplicando mais uma vez o esquema de integração por partes e o Teorema da Divergência junto à integral de domínio existente, tem-se:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u(Ku^*_{,i})_{,i} d\Omega = 0 \quad (7)$$

Desenvolvendo-se a derivada do núcleo da última integral de domínio na equação 7 obtém-se:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} uKu^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (8)$$

Considera-se uma solução fundamental tradicional, associada a um problema governado pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto ξ , denominado ponto fonte, de um domínio espacial infinito (vide Brebbia e Walker, 1980), ou seja:

$$u^*_{,ii}(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (9)$$

Cuja solução é dada por:

$$u^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (10)$$

Também é estratégico definir:

$$q^*(\xi; X) = Ku^*_{,i}(\xi; X)n_i \quad (11)$$

Nas equações precedentes r é a distância entre o ponto fonte ξ e um ponto genérico X do domínio, chamado ponto campo. Substituindo a equação 9 na última parcela do lado esquerdo da equação 8 e utilizando a definição contida na equação 10, tem-se:

$$\int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega - c(\xi)K(\xi)u(\xi) = 0 \quad (12)$$

A constante $c(\xi)$ refere-se às possibilidades do ponto fonte situar-se no interior ou fora do domínio Ω , assim como no contorno Γ , o que resulta em valores distintos, conforme pode ser obtido na literatura especializada (vide Brebbia et al., 1984).

A única integral de domínio restante será transformada numa integral de contorno através do procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade.

3. Aplicação da Quase-Dupla Reciprocidade

O procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade é uma estratégia similar àquela criada por Nardini e Brebbia (1982). A Quase-Dupla aproxima o núcleo da integral de domínio da equação 12 através do seguinte sentença:

$$b = uK_{,i} \cong \alpha_p^j \psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j \quad (13)$$

A forma diádica das funções auxiliares ψ e η utilizadas deve-se a aspectos operacionais, cujos detalhes podem ser colhidos em Loeffler e Mansur (2003). Substituindo a equação 13 na integral de domínio da equação 12, tem-se:

$$\int_{\Omega} uK_{,i} u_{,i} * d\Omega \cong \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i} * d\Omega \quad (14)$$

Uma vez mais, usando integração por partes, aplicando o Teorema da Divergência e usando a mesma solução fundamental, é possível reescrever a equação anterior na forma:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i} * d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j u_{,i} * n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) \quad (15)$$

A expressão completa fica:

$$\int_{\Gamma} q u * d\Gamma - \int_{\Gamma} u q * d\Gamma - c(\xi) K(\xi) u(\xi) + \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j u_{,i} * n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) = 0 \quad (16)$$

A próxima etapa é a discretização espacial e a aproximação das variáveis físicas, através de procedimentos típicos e bem conhecidos do MEC, que resultam no seguinte sistema matricial linear:

$$[H - M]U = GQ \quad (17)$$

4. Exemplos

4.1 Problema Unidimensional

Considere uma barra de seção constante, engastada numa extremidade e tracionada na outra, constituída de um material cujo módulo de elasticidade longitudinal varia ao longo do comprimento da mesma, de acordo com a seguinte equação:

$$E(x) = E_0 + E_0 \frac{mx}{L} = E_0 \left(\frac{L + mx}{L} \right) \quad (18)$$

Na equação 18, m é um parâmetro de controle de rigidez. As demais grandezas podem ser compreendidas com base na figura 1, mostrada a seguir, que ilustra as características físicas e geométricas do problema em questão.

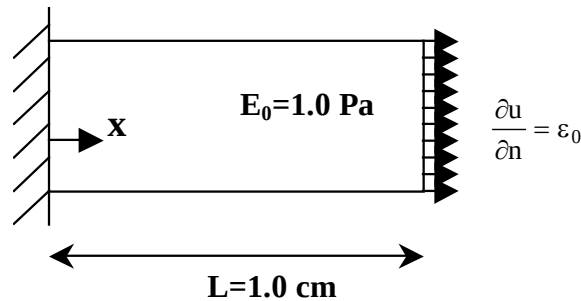


Figura 1: Características Físicas e Geométricas da barra não-homogênea

A função que descreve os deslocamentos da barra ao longo do seu comprimento é expressa por:

$$u(x) = \frac{\varepsilon_0 L (1 + m)}{m} \left[\text{LN} \left(\frac{L + mx}{L} \right) \right] \quad (19)$$

A simulação numérica é feita através de modelos discretos nos quais o contorno da barra é substituído por elementos de contorno retilíneos constantes. Inicialmente foi escolhido o valor da constante m igual à unidade e daí então realizada uma bateria de testes usando malhas com diversas quantidades de elementos de contorno, para verificação da convergência do método com o refinamento. O gráfico mostrado na figura 2 mostra a curva de erro percentual médio para o cálculo do deslocamento nos pontos nodais situados ao longo da coordenadas x em função da quantidade de pontos nodais ou elementos de contorno empregados.

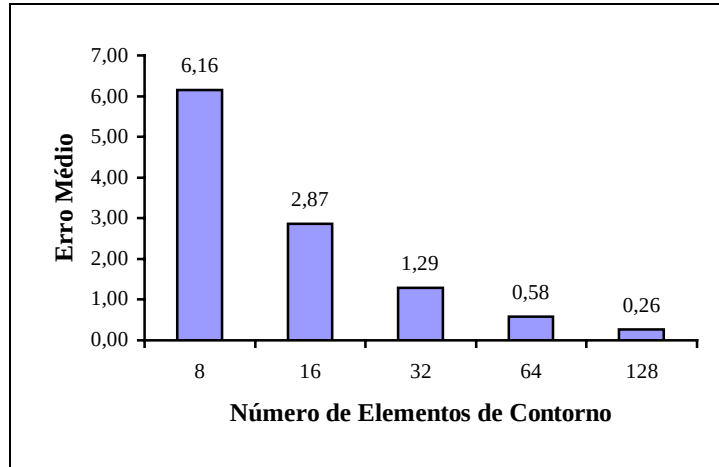


Figura 2: Comportamento do erro com o aumento da quantidade de pontos nodais

Feitos os testes com relação ao refinamento das malhas, é importante conhecer a precisão do método com a variação da constante m . Neste teste seguinte, toma-se a malha mais refinada, com 128 pontos nodais, e varia-se o valor de m , tornando mais acentuada a variação do módulo de rigidez. O erro médio percentual no cálculo dos deslocamentos em todos os pontos nodais colocados ao longo da barra pode ser observado a seguir na figura 3, que mostra haver um certo aumento do erro médio percentual, de acordo com a variação da constante m . A qualidade dos resultados ainda é bastante aceitável, considerando que há uma variação mais acentuada das propriedades constitutivas para valores mais altos de m .

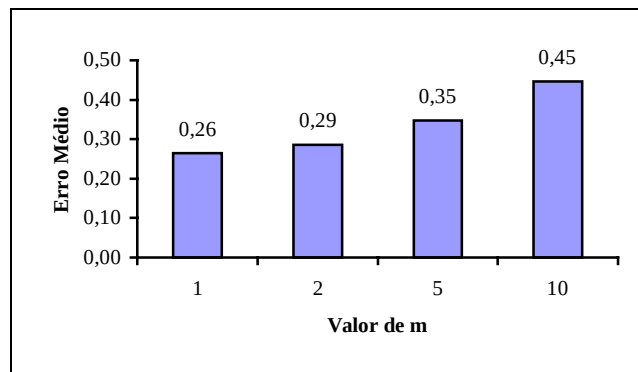


Figura 3: Comportamento do erro com a variação da constante m

4.2 Problema Bidimensional

Considere um problema no qual uma chapa plana quadrada não homogênea de dimensões unitárias, cuja equação de governo seja dada por:

$$K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \quad (20)$$

Considere o potencial prescrito em todo o contorno, na forma:

$$\theta = e^{Ax_1 + Bx_2} \quad (21)$$

Por sua vez, a propriedade física é expressa por:

$$K = e^{-Ax_1 - Bx_2} \quad (22)$$

Na simulação apresentada avaliou-se o comportamento do método com refinamento do contorno. Para esses testes iniciais admitiram-se os valores de A e B unitários e assim foram realizados os testes com as diversas malhas. O gráfico da figura 4 mostra o erro médio percentual de cada malha para o cálculo das derivadas normais nos pontos nodais, em função da quantidade elementos de contorno (E.C.) empregados.

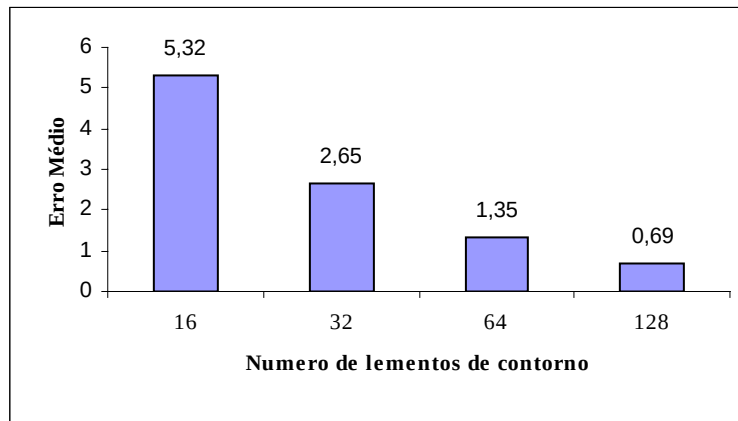


Figura 4 - Erro percentual nos valores de derivada normal no contorno

Diante dos resultados dessas simulações, observa-se o bom desempenho do método a partir da malha de 64 E.C., obtendo-se um erro médio de menos de 1% com malha de 128 E.C. Embora não possam ser mostrados por questão de espaço, as simulações realizadas com o aumento dos valores de A e B apresentaram resultados surpreendentemente bons, com estabilização do erro na mesma faixa apresentada, até valores de A e B iguais a 10.

5. Conclusões

A formulação com Quase-Dupla Reciprocidade trata da não-homogeneidade física como se fosse uma ação de domínio e a influência da sua variação é computada em cada elemento de contorno que é analisado. Assim, pelo fato da propriedade física variar ao longo de cada elemento, exige-se a introdução de uma boa quantidade de pontos nodais para níveis mais elevados e satisfatórios de precisão. Provavelmente, com a utilização de elementos de contorno com interpolação linear ou quadrática, há uma redução dessa demanda com taxas de convergência mais acentuadas e conseqüentemente erros ainda menores.

Os resultados apresentaram a esperada sensibilidade ao nível de refinamento das malhas, mas apresentaram um resultado surpreendentemente estável com a elevação do gradiente de variação da propriedade física.

O desempenho apresentado neste trabalho justifica o investimento de pesquisa nesta formulação, tendo em vista sua simplicidade e seu baixo custo computacional. Relevante ainda é a possibilidade de acoplamento imediato com algumas outras técnicas do Método dos Elementos de Contorno, que facilitam a simulação de problemas dinâmicos associados aos problemas de propagação de ondas, de interesse na prospecção de poços de petróleo e análises geotécnicas em geral.

6. Referências

- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C. *Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- BREBBIA, C.A., WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, U.K, 1984.
- LOEFFLER, C.F. , MANSUR, W.J. Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 58, Issue 8, pp 1167-1186 John Wiley and Sons, 2003.
- NARDINI, D., BREBBIA, C.A. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements. In *Proceedings of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering*, Southampton, 1982.
- SUTRADHAR, A., PAULINO, G.H., GRAY, L.J., 2002. Transient Heat Conduction in Homogeneous and Non-homogeneous Materials by the Laplace Transform Galerkin Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, 119-132, 2002.

