

Copyright 2004, Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás - IBP

Este Trabalho Técnico Científico foi preparado para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, a ser realizado no período de 2 a 5 de outubro de 2005, em Salvador. Este Trabalho Técnico Científico foi selecionado e/ou revisado pela Comissão Científica, para apresentação no Evento. O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pelo IBP. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões do Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás, Sócios e Representantes. É de conhecimento e aprovação do(s) autor(es) que este Trabalho será publicado nos Anais do 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás

ANÁLISE ESTRUTURAL AXISSIMÉTRICA DE CABOS UMBILICAIS E LINHAS FLEXÍVEIS

Jefferson Lacerda¹, M. A. Vaz²

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica/ Departamento de Engenharia Naval e Oceânica/Caixa Postal 68508/CEP 21945-970/RJ, lacerda@peno.coppe.ufrj.br

²Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/ Programa de Engenharia Oceânica/Caixa Postal 68508/CEP 21945-970/RJ, murilo@peno.coppe.ufrj.br

Resumo – Este trabalho objetiva desenvolver um modelo matemático para análise local estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais submetidos a um carregamento axissimétrico a estes componentes, correspondendo a cargas de tração (ou compressão moderada), torção, pressões externa e interna. As equações de governo são apresentadas em uma planilha desenvolvida no *software* Mathcad que retorna os valores de tensões e deformações sofridas por estes componentes sob o efeito de diferentes tipos e intensidades de carregamento. Para o desenvolvimento desta planilha foram utilizadas equações de equilíbrio linearizadas de forma a tornar o programa simplificado. Para comparação dos resultados fornecidos pela planilha realizou-se um estudo de caso.

Palavras-Chave: Linhas Flexíveis; Cabos Umbilicais; Análise Axissimétrica

Abstract – The aim of this work is to develop a mathematical model for local structural analysis of flexible pipes and umbilical cables submitted to axisymmetric loading, corresponding to tension (or moderate compression), torque, external and internal pressures. The governing equations are presented in a spreadsheet developed in the software Mathcad that returns the values of stresses and strains experienced by the layers under the effect of different types and intensities of loading. For the development of this spreadsheet the equations of equilibrium were linearized, which simplifies the algorithm. A case study is carried out to illustrate the applicability of the algorithm.

Keywords: Flexible Pipes, Umbilical Cables, Axisymmetric Analysis.

1. Introdução

O aumento da utilização de sistemas submarinos de produção tem implicado em maior emprego de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Algumas falhas recentes nestas estruturas indicam que um melhor conhecimento da resposta estrutural destes importantes componentes é necessário. Em função desta necessidade são feitos estudos mais confiáveis das tensões e deformações sofridas por estes materiais. As duas estruturas apresentadas (tubos flexíveis e cabos umbilicais) são utilizadas na indústria petrolífera offshore, sendo os tubos flexíveis aproveitados para o transporte de fluidos (óleo, gases, produtos químicos, água de injeção) e os cabos umbilicais usados para a comunicação e controle entre a superfície e equipamentos submersos. A estrutura destes materiais é composta por várias camadas concêntricas, sendo estas plásticas ou metálicas. As camadas plásticas são formadas basicamente por polímeros, enquanto que as camadas metálicas são usualmente formadas por aço. As camadas metálicas possuem forma helicoidal, assegurando pequena rigidez flexional ao conjunto. São geralmente duas e enroladas em sentidos contrários para garantir um balanceamento quanto à torção. No caso de umbilicais há o acréscimo de um núcleo eletro-hidráulico à estrutura.

Alguns trabalhos foram essenciais para a realização do programa desenvolvido. Féret e Bournazel (1987) desenvolveram uma metodologia para se obter a resposta linear de tubos flexíveis. Witz e Tan (1992) desenvolveram um modelo analítico do comportamento estrutural de tubos flexíveis, cabos umbilicais e cabos marinhos sob a ação de forças axiais e torcionais. O modelo é baseado na interação entre as camadas que compõem um tubo flexível formado

por camadas cilíndricas e helicoidais. Os resultados são apresentados para cabo marinho, umbilical e tubo flexível. Ramos Jr. (2001) estudou os modelos analíticos para a previsão do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Propôs modelos para análise local destas estruturas sob a ação de carregamentos de tração, torção, pressão interna, externa e flexão, agindo isoladamente ou combinados. Foram propostos modelos analíticos para cada camada, resultando num sistema de equações algébricas que, ao ser resolvido, fornece os valores de rigidez equivalente axial, flexional e torcional do tubo/cabo. Custódio e Vaz (2002) desenvolveram uma formulação e solução para uma resposta dos tubos flexíveis e cabos umbilicais sujeitos a um carregamento de tração, torque, pressão interna e externa. As camadas homogêneas e helicoidais são respectivamente descritas pelas formulações de Lamé e Clebsch-Kirchhoff, logo formam equações algébricas não-lineares as quais são resolvidas por um algoritmo iterativo. O modelo desenvolvido leva em consideração algumas características como ser não-linear, formação de gap, contato interno entre as camadas de arame e isto pode ser aplicado no projeto e verificação da seção transversal do tubo flexível e cabo umbilical.

2. Formulação Matemática

2.1. Modelo para Camadas Helicoidais

As equações desenvolvidas a seguir são empregadas para as camadas metálicas (armaduras de tração, carcaça e camada zeta) dos tubos. Estas camadas desempenham um importante papel de resistência mecânica à tração e à compressão dos tubos, sendo pouco resistente à flexão. Analisando uma fita de arame da camada de armadura de tração, a sua condição inicial pode ser representada como:

$$\kappa_0 = 0, \quad \kappa'_0 = \frac{\cos^2 \alpha}{R}, \quad \kappa_{t0} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} \quad (1)$$

Onde:

κ_0 e κ'_0 → Curvaturas de flexão nas direções normal e binormal, respectivamente

κ_{t0} → Torção na direção axial da fita

R e α → Raio e ângulo em relação à linha de base da fita

A Figura 1 ilustra uma fita de arame e a direção normal, binormal, axial e tangencial.

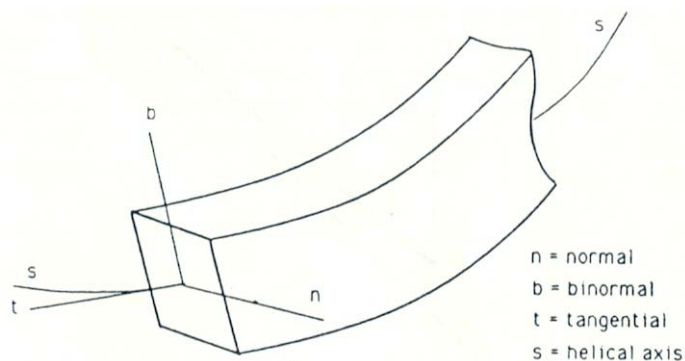


Figura 1. Seção Transversal de um Arame.

Aplicando o carregamento o arame se deforma e assume a configuração helicoidal, com novos raio e ângulo de inclinação, mas mantém, por hipótese, uma configuração helicoidal. O novo raio pode ser representado como $R - \Delta R$ e o novo ângulo como $\alpha_1 = \alpha + \Delta \alpha$.

$$\kappa_1 = 0, \quad \kappa'_1 = \frac{\cos^2 \alpha_1}{R - \Delta R}, \quad \kappa_{t1} = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{R - \Delta R} \quad (2)$$

Onde:

κ_1 e κ'_1 → Curvatura de flexão na direção normal e binormal, respectivamente

κ_{t1} → Torção na direção axial da fita

ΔR e α_1 → Variações do raio e ângulo helicoidal da fita após o carregamento

As equações (2) são então expandidas e linearizadas, assumindo-se $\Delta \alpha$ e ΔR pequenos, $\sin \Delta \alpha \cong \Delta \alpha$ e $\cos \Delta \alpha \cong 1$, assim:

Curvatura de flexão na direção binormal

$$\kappa'_0 = \Delta R \left(\frac{\cos^2 \alpha}{R^2} \right) + \Delta \alpha \left(-\frac{\sin 2\alpha}{R} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{R} \quad (3a)$$

Torção na direção axial da fita:

$$\kappa_{t1} = \Delta R \left(\frac{\sin 2\alpha}{2R^2} \right) + \Delta \alpha \left(\frac{\cos 2\alpha}{R} \right) + \frac{\sin 2\alpha}{2R} \quad (3b)$$

Os momentos fletor e tursor são assumidos proporcionais às mudanças na curvatura de flexão e torção, respectivamente, até o limite de deformação elástica:

$$B = EI_n (\kappa_1 - \kappa_0), \quad B' = EI_b (\kappa'_1 - \kappa'_0), \quad H = GJ (\kappa_{t1} - \kappa_{t0}) \quad (4)$$

Onde:

EI_n , EI_b e GJ → Rigidezes à flexão normal, binormal e torcional da fita

H , B e B' → Momentos tursor e fletores na direção normal e binormal, respectivamente

Substituindo as equações (2) e (3) em (4) resulta:

$$B = 0, \quad B' = \Delta R \left(\frac{EI_b \cos^2 \alpha}{R^2} \right) + \Delta \alpha \left(-\frac{EI_b \sin 2\alpha}{R} \right), \quad H = \Delta R \left(\frac{GJ \sin 2\alpha}{2R^2} \right) + \Delta \alpha \left(\frac{GJ \cos 2\alpha}{R} \right) \quad (5)$$

Estes valores de rigidez dependem da forma da seção transversal da fita. A correspondente deformação axial é dada por:

$$\varepsilon_a = T/EA \quad (6)$$

Através do estado não deformado e deformado da fita de arame pode-se obter as relações geométricas entre deformação longitudinal e ângulo de torção. Estas relações são ilustradas na Figura 2 e matematicamente expressas nas equações (7.a) e (7.b).

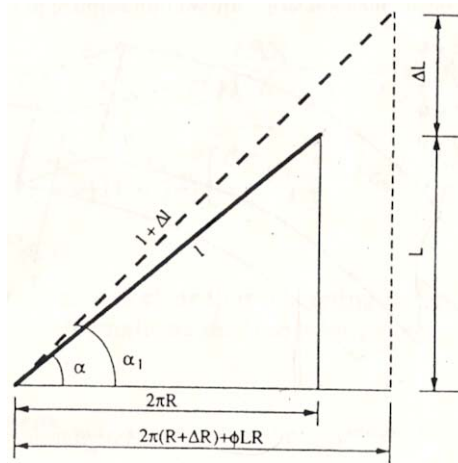


Figura 2. Relações Geométricas.

$$\varepsilon_x = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} (1 + \varepsilon_a) - 1 \Rightarrow \varepsilon_a = \varepsilon_x - \Delta \alpha \cot g \alpha \quad (7.a)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \Delta \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \varepsilon_x}{1 - \Delta R/R + \phi L/2\pi} \Rightarrow \varepsilon_x = \Delta R \left(-\frac{1}{R} \right) + \phi \left(\frac{L}{2\pi} \right) + \Delta \alpha \left(\frac{2}{\sin 2\alpha} \right) \quad (7.b)$$

O equilíbrio da fita pode ser simplificado se todas as forças e momentos forem assumidos constante ao longo da fita. Estas considerações quando incluídas nas equações de Clebsch-Kirchhoff apresentadas em Love (1944) têm como resultado:

$$\begin{cases} -N'\kappa_{t1} + T\kappa'_1 + X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \\ -B'\kappa_{t1} + H\kappa'_1 - N' = 0 \\ B = 0 \\ \Theta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Onde:

N' , T , Θ → Esforço cortante na direção binormal, força axial, momento torsor distribuído, respectivamente
 X , Y , Z → Força distribuída na direção lateral, binormal e axial da fita de arame, respectivamente
 Isolando-se N' , substitui-se este valor na equação (8.a) e encontra-se o valor de X .

$$\begin{aligned} X = \Delta R \left(-\frac{\sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha}{4R^4} (EI_b - GJ) + \frac{EA \cos^2 \alpha}{R^2} \right) + \phi \left(-\frac{EAL \cos^2 \alpha}{2\pi R} \right) + \\ + \Delta \alpha \left(-\frac{2EA \cos^2 \alpha}{R \sin 2\alpha} + \frac{EA \cot g \alpha \cos^2 \alpha}{R} + \frac{EI_b \sin^3 2\alpha}{4R^3} + \frac{GJ \cos 2\alpha \cos^2 \alpha \sin 2\alpha}{2R^3} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

A força distribuída na fita de arame é igual à diferença entre as pressões de contato das camadas interna e externa à fita:

$$q_{out} - q_{int} = X/b \quad , \quad b \rightarrow \text{Largura do arame} \quad (10)$$

Os somatórios dos momentos e forças axiais atuantes em cada fita de arame resultam nas equações de força e momento para as camadas helicoidais. As fitas assumem as mesmas deformações.

Força Axial

$$\begin{aligned} F = ms(T \sin \alpha_1 + N' \cos \alpha_1) \\ F = \phi \left(\frac{msEAL \sin \alpha}{2\pi} \right) + \Delta R \left(-\frac{msEA \sin \alpha}{R} - \frac{msEI_b \sin 2\alpha \cos^3 \alpha}{2R^3} + \frac{msGJ \sin 2\alpha \cos^3 \alpha}{2R^3} \right) + \\ + \Delta \alpha \left(\frac{msEA}{\cos \alpha} - msEA \cos \alpha + \frac{msEI_b \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{2R^2} + \frac{msGJ \cos 2\alpha \cos^3 \alpha}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Momento Torsor

$$\begin{aligned} M_t = ms(H \sin \alpha_1 + B' \cos \alpha_1 + T(R - \Delta R) \cos \alpha_1 - N'(R - \Delta R) \sin \alpha_1) \\ M_t = \phi \left(\frac{msLEAR \cos \alpha}{2\pi} \right) + \Delta R \left(\frac{msGJ \sin 2\alpha \sin \alpha}{2R^2} - msEA \cos \alpha + \frac{ms(EI_b - GJ) \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2R^2} + \frac{msEI_b \cos^3 \alpha}{R^2} \right) + \\ + \Delta \alpha \left(\frac{msGJ \sin \alpha \cos 2\alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{R} - \frac{msEI_b \sin 2\alpha \cos \alpha}{R} + \frac{msEAR}{\sin \alpha} - msEAR \cos \alpha \cot g \alpha - \frac{msEI_b \sin \alpha \sin^2 2\alpha}{2R} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

A Pressão de contato média dos arames é dada por:

$$(q_{ext} + q_{int})/2 = \nu F/A - E\Delta t/t \quad (13)$$

2.2. Modelo para Camadas Cilíndricas Homogêneas

As camadas plásticas são modeladas como tubos de paredes esbeltas, onde é possível determinar o seu equilíbrio de forças atuantes através das equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad , \quad \sigma_\theta t = (q_{int} - q_{ext})R \quad (14)$$

Onde:

x e s → Direção axial e comprimento de arco da camada, respectivamente

σ_x , σ_θ e $\tau \rightarrow$ Tensões axial, circunferencial e cisalhante, respectivamente

Para as tensões serem soluções das equações as condições no contorno do tubo devem ser satisfeitas.
Condições na fronteira:

$$\sigma_x = F/(2\pi Rt) , \sigma_\theta = (q_{int} - q_{ext})R/t , \tau = M/(2\pi R^3 t) \quad (15)$$

As deformações no tubo são assumidas uniformes e todas as camadas se deformam igualmente.

$$\varepsilon_x = \Delta L/L , \varepsilon_\theta = -\Delta R/R , \varepsilon_r = \Delta t/t , \gamma = \phi R \quad (16)$$

Onde:

ε_x , ε_θ , ε_r e $\gamma \rightarrow$ Deformação longitudinal, circunferencial, radial e torcional respectivamente

A tensão radial pode ser expressa pela média das pressões internas e externas atuantes no tubo.

$$\sigma_r = (q_{int} + q_{ext})/2 \quad (17)$$

As equações da relação tensão-deformação são dadas pela generalização da lei de Hooke.

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E , \varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_x)/E , \varepsilon_r = (\sigma_r - \nu\sigma_x - \nu\sigma_\theta)/E , \gamma = \tau/G \quad (18)$$

Resolvendo as equações (18) para os valores de tensão, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \right] , \sigma_\theta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_r) \right] \\ \sigma_r &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_r + \frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_\theta) \right] , \tau = G\gamma \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo as equações (15), (16) e (17) nas equações (19), encontra-se a relação de força, momento e pressão atuante nas paredes do tubo.

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\pi RtE(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\Delta t}{t} - \frac{\Delta R}{R} \right) \right] , q_{int} - q_{ext} = \frac{tE(1-\nu)}{R(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\Delta R}{R} - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t} \right) \right] \\ q_{int} + q_{ext} &= \frac{2E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\Delta t}{t} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta R}{R} \right) \right] , M = G2\pi R^3 t \phi \end{aligned} \quad (20)$$

3. Estudo de Caso

Os valores utilizados para o estudo de caso são apresentados na Tabela 1. Escrevendo-se as equações algébricas lineares para as camadas cilíndricas homogêneas e para as camadas helicoidais presentes no umbilical, têm-se um conjunto de 23 equações e 23 incógnitas. Este conjunto de equações é expresso matematicamente como uma matriz quadrada (23 x 23), que multiplicada pelo vetor das incógnitas resulta no vetor de valores de força, momento, pressão interna e pressão externa de cada camada. As incógnitas do problema são definidas então, pelo inverso da matriz quadrada multiplicada pelo vetor força, momento, pressão interna e pressão externa de cada camada. O modelo utilizado considera o núcleo eletro-hidráulico, como um conjunto de molas, que apresentam uma constante elástica variando entre 5×10^8 e 2×10^9 Pa/m, sendo este valor estimado experimentalmente por Custódio e Vaz (2002). Os resultados apresentados na Tabela 2 foram obtidos para o valor de 2×10^9 Pa/m como constante elástica da mola.

Tabela 1. Dados do Cabo Umbilical.

Camadas	D _{ext} (mm)	Propriedades
Camada Plástica Externa	94,0	Material: HDPE, $E = 720$ MPa, $\nu = 0,42$.
Armadura Externa	83,8	$N_w = 56$ arames, $\alpha_r = 70^\circ$, $d_w = 4,1$ mm arame, $E = 205$ GPa, $\nu = 0,29$.
Armadura Interna	75,6	$N_w = 50$ arames, $\alpha_r = 70^\circ$, $d_w = 4,1$ mm arame, $E = 205$ GPa, $\nu = 0,29$.
Camada Plástica Interna	67,4	Material: HDPE, $E = 720$ MPa, $\nu = 0,42$.

4. Resultados Obtidos

Os resultados obtidos da análise do umbilical mencionado na Tabela 1 são comparados com resultados de testes experimentais que analisaram o mesmo umbilical. Esta comparação é feita na Tabela 2.

Tabela 2. Resultados e Comparações.

Resultados	Modelo	Teste	Unidades
Rigidez axial (EA)	$134,5 \times 10^6$	$(71 - 101) \times 10^6$	N
Acoplamento (tração) ε/ϕ	0,191	0,19	m
Momento torsor horário	$73,38 \times 10^3$	$44,7 \times 10^3$	N.m ²
Acoplamento horário ϕ/ε	-63,539	182	rad/m
Momento torsor anti-horário	$73,38 \times 10^3$	$19,1 \times 10^3$	N.m ²
Acoplamento anti-horário ϕ/ε	-63,539	- 406	rad/m

As Figuras 3 e 4 representam, respectivamente, as variações lineares da deformação longitudinal e torcional sofridas pelo modelo à medida que se aumenta a intensidade da força e do momento torsor aplicado como carregamento.

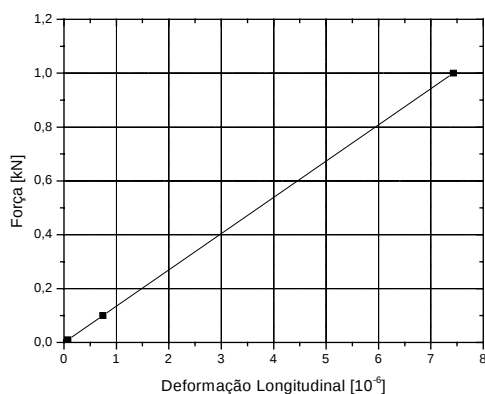


Figura 3. Força x Deformação Longitudinal.

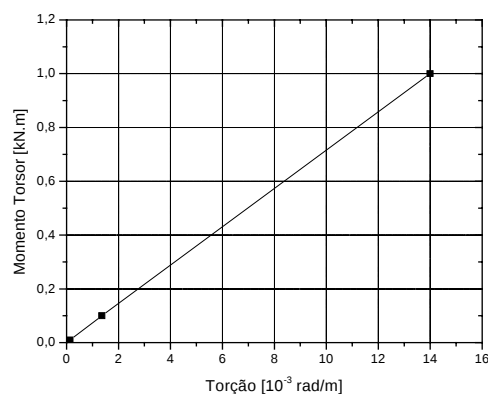


Figura 4. Momento Torsor x Deformação Angular.

5. Conclusão

Devido o aumento da utilização de sistemas submarinos de produção é de fundamental importância o estudo aprofundado nesta área visando evitar as falhas que tem ocorrido recentemente. Estas falhas têm consequências graves incluindo fatores econômicos, sociais e ambientais.

A partir da análise dos resultados obtidos para o modelo algébrico linear apresentado e comparando-os com testes experimentais realizados para o mesmo umbilical por diferentes autores, pode-se afirmar que os resultados apresentam-se satisfatórios e próximos às estimativas propostas. Porém apresentando uma extrapolação para estes valores.

Com isso, conhecendo-se os valores de tensão e deformação atuantes em cada camada do umbilical em função de um específico carregamento, pode-se dimensionar a estrutura pelo modelo linear garantindo a sua integridade estrutural.

6. Agradecimentos

À Agência Nacional do Petróleo, ANP, pelo incentivo à pesquisa desenvolvida.

7. Referências

- FERÉT J, BOURNAZEL H. Calculation of stress and slip in structural layers of unbonded flexible pipes. J Offshore Mech Arctic Engng 1987, 109, 263-9.
- WITZ JA, TAN. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. J Marine Struct 1992, 5(2 and 3), 205-227.
- RAMOS Jr. Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais. Dissertation in Portuguese, Polytechnical school of the University of São Paulo, 2001.
- CUSTÓDIO A.B., VAZ M. A. A nonlinear formulation for the axisymmetric response of umbilical cables and flexible pipes. Applied Ocean Research 2002, 24, 21-29.