

Copyright 2004, Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás - IBP

Este Trabalho Técnico Científico foi preparado para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, a ser realizado no período de 2 a 5 de outubro de 2005, em Salvador. Este Trabalho Técnico Científico foi selecionado e/ou revisado pela Comissão Científica, para apresentação no Evento. O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pelo IBP. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões do Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás, Sócios e Representantes. É de conhecimento e aprovação do(s) autor(es) que este Trabalho será publicado nos Anais do 3º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás

ALOCÇÃO ÓTIMA DE *LIFT*-GÁS: MODELOS DE LINEARIZAÇÃO POR PARTES

Augusto M. de Conto¹, Eduardo Camponogara²

¹ Departamento de Automação e Sistemas - UFSC, Cx.Postal 476, Florianópolis-SC,
deconto@das.ufsc.br

² Departamento de Automação e Sistemas - UFSC, Cx.Postal 476, Florianópolis-SC,
camponog@das.ufsc.br

Resumo – Neste trabalho apresentamos duas formulações para linearização por partes de funções utilizando programação linear inteira mista. Novas formulações buscam restrições que geram espaços de soluções ótimos, agilizando a busca da solução global. Aplicamos as formulações ao problema da alocação ótima de gás de injeção, com o objetivo de avaliá-las. Realizamos testes numéricos com o auxílio de ferramentas computacionais para obter uma métrica de desempenho das formulações, e poder assim compará-las. Por fim, mostramos que modelos mais modernos apresentam resultados melhores que as formulações clássicas.

Palavras-Chave: otimização, *gas-lift*, linearização por partes, programação linear inteira mista

Abstract – This paper presents two piecewise linearization formulations with mixed-integer linear programming. New formulations investigate optimum solution spaces, making global search faster. We apply these formulations to the optimum gas-lift allocation problem. Numerical tests are executed to compare the presented formulations. Finally, we show that modern formulation models have better results than the classical ones.

Keywords: optimization, gas-lift, piecewise linearization, mixed-integer linear programming

1. Introdução

Existem vários métodos para elevação artificial de petróleo. Um dos mais comuns é o *gas-lift*, em que gás é injetado na base do poço provocando a elevação do óleo. Em uma rede de poços de petróleo que utilizam este processo, a unidade de compressão, que condiciona o gás a ser injetado, tem sua produção compartilhada entre os poços. Um fator limitante é sua capacidade máxima de compressão, pois a instalação destas unidades representa um custo significativo e nem sempre permite que todos os poços operem de maneira ótima.

O problema de alocação ótima de *lift-gas* consiste em decidir em quais regiões os poços irão operar, ou seja, quanto gás deve ser injetado em cada poço, restrito à capacidade máxima de condicionamento do compressor. Duas abordagens podem ser utilizadas nesta decisão. A primeira é baseada em um critério econômico, a qual busca o maior lucro que o conjunto de poços pode fornecer. Outra abordagem é baseada na performance hidrodinâmica, onde buscamos taxas de injeção que maximizem a produção total dos poços. Nosso trabalho é baseado na primeira abordagem. Este problema pode ser escrito em programação matemática da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 P : \max f &= \sum_{n=1}^N f_n(q_i^n, q_p^n) \\
 \text{s.a.} & \\
 q_p^n &= q_p^n(q_i^n) \quad n = 1, \dots, N \\
 \sum_{n=1}^N q_i^n &\leq q_i^{\max} \\
 l_n y_n &\leq q_i^n \leq u_n y_n \quad n = 1, \dots, N \\
 y_n &\in \{0,1\} \quad n = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde, N é o número de poços do campo; q_i^n é a taxa de gás injetada em um poço n ; $q_p^n(q_i^n)$ é uma função não linear conhecida como curva de performance do poço, que descreve a quantidade de óleo produzida q_p^n em função da quantidade q_i^n de gás injetado para um poço n ; f_n é uma função que representa o lucro gerado por um dado poço n ; $q_i^{\max}$ é a capacidade máxima de compressão de gás do campo; y_n assume valor 1 se o poço estiver ativado e 0 caso contrário; e l_n e u_n são limites de operação do poço.

Kanu et al. (1981) foram os primeiros a abordar o problema, desenvolvendo um método analítico de busca para a taxa de injeção ótima baseado na inclinação da curva de performance do poço. O método passo-a-passo busca o ponto em que o custo do incremento no gás injetado seja o mesmo dos benefícios do incremento na produção. Este método, chamado de *equal-slope*, não pode ser aplicado em casos que os poços não possuem resposta imediata ao *gas-lift* (curva de performance descontínuas ou não côncavas).

Um melhoramento do *equal-slope* foi proposto por Nishikiori et al. (1989) em que é empregado um método quasi-Newton de otimização não linear. Duas desvantagens desta abordagem são a necessidade de um ponto de início da busca próximo ao ótimo e a falta de garantia de convergência.

Métodos heurísticos também foram propostos. Buitrago et al. (1996) desenvolveu um método que combina exploração estocástica do espaço de soluções e cômputo da direção de descenso. Martínez et al. (1994) aplicaram algoritmos genéticos para determinar as taxas injeção de gás que maximizam a produção. Abordagens como estas não garantem ótimos globais, podendo convergir para ótimos locais, e o custo de explorar todo o espaço de soluções pode ser proibitivo.

Recentemente Camponogara e Nakashima (2005b, 2005) propuseram uma solução baseada em programação dinâmica. Este método permite a obtenção das taxas de injeção próximas do ótimo para conjuntos de poços que não possuam resposta imediata ao *lift-gas*, e aceita múltiplas curvas de performance nos poços. Entretanto inclusão de novas restrições pode não ser possível, impedindo que a solução seja expandida.

Camponogara (2005a) propôs ainda uma abordagem baseada em programação inteira mista para alocação ótima de *lift-gas*. Nela, a curva de performance do poço é linearizada por partes com o auxílio de variáveis binárias. Foram empregadas técnicas de geração de cortes para acelerar o processo de obtenção das taxas de injeção que levam a uma solução economicamente ótima.

No campo da linearização por partes, Sherali (2001) propõe uma formulação alternativa à clássica (Wolsey, 1999). Em seu trabalho ele mostra que sua formulação é equivalente à de Padberg (2000). Por sua vez, Padberg afirma que sua formulação é “localmente muito melhor” que a clássica “que deve ser definitivamente abandonada a pesar de sua popularidade nos livros texto”.

Neste trabalho aplicamos a formulação de Sherali (2001) e a formulação clássica de alocação de gás de injeção para linearização por partes e buscamos comparar as diferentes formulações. Na seção 2 apresentamos as duas abordagens de linearização por partes. Em seguida apresentaremos a aplicação das formulações propostas na seção 2 ao problema de alocação ótima de *lift-gas*. A seção 4 apresenta uma comparação numérica entre as formulações e discussão dos resultados. Finalmente na seção 5 temos as conclusões e perspectivas para futuros trabalhos.

2. Linearização por partes

Considere o problema de otimização separável

$$\max F = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (2)$$

onde $(x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto das possíveis soluções para F , e f_j é uma função não-linear qualquer. Tomemos agora a função $f_j(x_j)$ e para simplificar a notação eliminamos o índice j . A linearização por partes de funções separáveis consiste em selecionar $k + 1$ pontos $P = \{p_i: p_i = (a_i, f(a_i)), a_0 = l, a_k = u, a_{i-1} < a_i\}$ que pertençam a uma região $[l, u]$ do domínio de x e interpolá-los por retas, formando uma função linear por partes $f'(x)$.

Uma abordagem para linearização de funções utilizando programação linear inteira mista, conforme Wolsey (1999), consiste em utilizar variáveis binárias $y_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, k$, para selecionar a parte da função que se deseja trabalhar, e variáveis de peso $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, \dots, k$, que representam a influência de cada ponto de P sobre a formulação. Para esta escolha das variáveis, a formulação fica:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^k a_i \lambda_i & f'(x) &= \sum_{i=0}^k f(a_i) \lambda_i \\ \text{s.a.} & & & \\ \lambda_0 &\leq y_1 & & \\ \lambda_i &\leq y_i + y_{i+1} & i &= 1, \dots, k-1 \\ \lambda_k &\leq y_k & & \\ \sum_{i=0}^k \lambda_i &= 1 & & \\ \sum_{i=1}^k y_i &= 1 & & \end{aligned} \quad (3)$$

As três primeiras restrições garantem que apenas a região selecionada possua peso para seus pontos diferentes de zero. A restrição seguinte não permite que os pontos tenham influência na formulação maior que seu próprio valor. A última restrição garante que apenas uma região seja selecionada.

A formulação proposta por Sherali (2001) é bastante parecida com a anterior, mas com implicações significativas. Empregam-se as mesmas variáveis binárias $y_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, k$, para selecionar a parte da função que se deseja trabalhar. Para o peso dos pontos, utilizam-se duas variáveis λ_i^L e $\lambda_i^R \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, k$ para cada parte da função. A variável λ_i^L representa o peso do ponto à esquerda da região, e λ_i^R o peso do ponto à direita. Assim, cada ponto p_i da função (exceto o primeiro e o último) possui duas variáveis de peso associados a ele: λ_i^R e λ_{i+1}^L . Esta formulação fica:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k [a_{i-1} \lambda_i^L + a_i \lambda_i^R] & f'(x) &= \sum_{i=1}^k [f(a_{i-1}) \lambda_i^L + f(a_i) \lambda_i^R] \\ \text{s.a.} & & & \\ \lambda_i^L + \lambda_i^R &= y_i & i &= 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k y_i &= 1 & & \end{aligned} \quad (4)$$

Observamos que as restrições desta formulação são bem mais simples que da apresentada na Equação 3. A primeira restrição garante que apenas a região selecionada possua pontos com pesos não nulos, e a segunda que apenas uma região seja selecionada. Em contra partida, esta formulação apresenta $k-1$ variáveis inteiras a mais que a primeira. Este número maior de variáveis reais reflete apenas em uma necessidade adicional de memória para armazenar os nós durante a execução do algoritmo de *branch-and-bound*, não aumentando o número de nós da árvore de busca se comparado com um aumento de mesma ordem no número de variáveis inteiras.

Padberg (2000) mostra em seu trabalho antecessor ao de Sherali (2001) que a formulação apresentada na Equação 3 possui o poliedro de soluções não mínimo, e apresenta formulações com características mínimas, mostrando que estas formulações existem. Em seu trabalho, Sherali (2001) apresenta uma formulação didática às de Padberg (2000), e mostra que em sua formulação o espaço de soluções também é ótimo, propondo que o modelo da Equação 3 não mais seja utilizado.

Uma formulação com espaço de soluções mínimo implica que para o caso base, a solução da relaxação linear (as variáveis inteiras são transformadas em reais) induzirá a solução do problema original. Esta afirmação deixa de ser válida quando inserimos outras restrições ao problema. Em nossa aplicação é inserida uma restrição do limite de compressão de gás, que acopla as linearizações e modifica o poliedro de soluções. Mesmo assim, como o poliedro ainda é menor, espera-se que a modelagem do problema baseado na formulação da Equação 4 apresente melhores resultados que a baseada na formulação da Equação 3.

3. Modelagem do problema

Nesta seção apresentamos dois modelos para a resolução do problema de *gas-lift* com programação inteira mista e linearização por partes. O primeiro (P_{pl}^{sh}) é a aplicação da formulação de linearização por partes apresentada na Equação 4 sobre o modelo geral da Equação 1. O segundo modelo (P_{cpl}^{sh}) é uma compactação do primeiro, em que são eliminadas variáveis desnecessárias. Outras duas formulações (P_{pl} e P_{cpl}) de características semelhantes foram apresentadas com base na formulação clássica (Wolsey, 1999) e foram feitas aplicando a formulação da Equação 3 sobre o modelo da equação 1.

A função f_n representa o lucro gerado por cada poço, levando em conta o custo da injeção do gás, as proporções de óleo, gás e água produzidos do poço, os lucros gerados pelo óleo e gás produzidos e o custo de processamento da água produzida. O conjunto de pontos $Q_n = \{(q_i^{n,k}, q_p^{n,k}) : k = 0, \dots, \kappa(n)\}$ forma a base da linearização por partes para cada poço n , e possui $\kappa(n)+1$ pontos. Para o modelo admitimos que não existe produção natural do poço, e que é necessário um mínimo de injeção para que o poço passe a produzir¹. Assim, o primeiro ponto da curva é nulo. A linearização por partes do poço é apresentada na Figura 1.

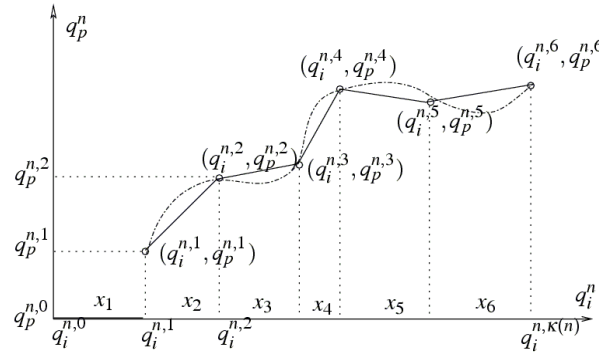


Figura 1. Linearização por partes da curva de performance

Sejam $f_{n,k} = f_n(q_i^{n,k}, q_p^{n,k})$; $x_{n,k} \in \{0,1\}$ ($n = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, \kappa(n)$) as variáveis binárias que selecionam a região ativas k de uma dada curva linearizada de performance n ; $\lambda_{n,k}^L \in \mathbb{R}_+$ ($n = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, \kappa(n)$) a variável de peso do ponto à esquerda de uma região k de uma curva n ; e $\lambda_{n,k}^R \in \mathbb{R}_+$ ($n = 1, \dots, N$, $k = 2, \dots, \kappa(n)$) a variável de peso do ponto à direita de uma região k de uma curva n . Observe que a primeira região não possui variável de peso à direita, pois ela possui valor constante nulo da curva de performance. O modelo então fica:

$$P_{pl}^{sh} : \max F = \sum_{n=1}^N \left[f_{n,0} \lambda_{n,1}^L + \sum_{k=2}^{\kappa(n)} (f_{n,k-1} \lambda_{n,k}^L + f_{n,k} \lambda_{n,k}^R) \right] \quad (5)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1}^L &= x_{n,1} & n &= 1, \dots, N \\ \lambda_{n,k}^L + \lambda_{n,k}^R &= x_{n,k} & n &= 1, \dots, N \\ & & k &= 2, \dots, \kappa(n) \\ \sum_{k=1}^{\kappa(n)} x_{n,k} &= 1 & n &= 1, \dots, N \\ \sum_{n=1}^N \left[q_i^{n,0} \lambda_{n,1}^L + \sum_{k=2}^{\kappa(n)} (q_i^{n,k-1} \lambda_{n,k}^L + q_i^{n,k} \lambda_{n,k}^R) \right] &\leq q_i^{\max} \end{aligned}$$

Podemos observar que este modelo possui variáveis que podem ser escritas como funções de outras. Eliminando estas variáveis obtemos uma formulação de dimensão cheia. Uma maneira de fazer esta compactação é executando as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} x_{n,1} &= 1 - \sum_{k=2}^{\kappa(n)} x_{n,k} & n &= 1, \dots, N \\ \lambda_{n,k}^R &= x_{n,k} - \lambda_{n,k}^L & n &= 1, \dots, N \\ & & k &= 2, \dots, \kappa(n) \end{aligned} \quad (6)$$

Efetuando as substituições e considerando que $(q_i^{n,0}, q_p^{n,0}) = (0,0)$, portanto $f_{n,0} = 0$, obtemos a seguinte formulação compacta:

¹ Esta hipótese não implica em perda de generalidade.

$$P_{cpl}^{sh} : \max F = \sum_{n=1}^N [f_{n,k} x_{n,k} - (f_{n,k} - f_{n,k-1}) \lambda_{n,k}^L] \quad (7)$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_{n,k} - \lambda_{n,k}^L &\geq 0 & n &= 1, \dots, N \\ & & k &= 2, \dots, \kappa(n) \\ \sum_{k=2}^{\kappa(n)} x_{n,k} &\leq 1 & n &= 1, \dots, N \\ \sum_{n=1}^N \sum_{k=2}^{\kappa(n)} [q_i^{n,k} x_{n,k} - (q_i^{n,k} - q_i^{n,k-1}) \lambda_{n,k}^L] &\leq q_i^{\max} \end{aligned}$$

Observamos que nesta formulação compacta, as variáveis $\lambda_{n,k}^R$ e $x_{n,1}$ não mais são necessárias. A formulação clássica P_{pl} é apresentada na Equação 8 a seguir:

$$P_{pl} : \max F = \sum_{n=1}^N f_n \left(\sum_{k=0}^{\kappa(n)} q_i^{n,k} \lambda_{n,k}, \sum_{k=0}^{\kappa(n)} q_p^{n,k} \lambda_{n,k} \right) \quad (8)$$

s.a.

$$\begin{aligned} \lambda_{n,0} &\leq x_{n,1} & n &= 1, \dots, N \\ \lambda_{n,1} &\leq x_{n,2} & n &= 1, \dots, N \\ \lambda_{n,k} &\leq x_{n,k} + x_{n,k+1} & n &= 1, \dots, N \\ & & k &= 2, \dots, \kappa(n) - 1 \\ \lambda_{n,\kappa(n)} &\leq x_{n,\kappa(n)} & n &= 1, \dots, N \\ \sum_{k=0}^{\kappa(n)} \lambda_{n,k} &= 1 & n &= 1, \dots, N \\ \sum_{k=0}^{\kappa(n)} x_{n,k} &= 1 & n &= 1, \dots, N \\ \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{\kappa(n)} q_i^{n,k} \lambda_{n,k} &\leq q_i^{\max} \end{aligned}$$

A formulação P_{cpl} é obtida a partir de P_{pl} fazendo a eliminação de dependências lineares, da mesma maneira que foi apresentado na Equação 6.

4. Comparação numérica

Executamos testes numéricos para os quatro modelos apresentados. Instâncias com grupos de 32 e 64 poços foram aplicadas aos modelos, variando-se também a restrição da capacidade máxima de compressão. Para avaliar a qualidade das formulações procuramos aplicar o algoritmo de *branch-and-bound* puro. Para isso, contamos com o auxílio do software CPLEX e desligamos as funcionalidades de pré-processamento do modelo e a aplicação de cortes. Como métrica para comparação, adotamos o número de iterações executadas pelo algoritmo e o número de nós gerados na árvore de soluções. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 1. Comparação entre as abordagens

N	$q_i^{\max}$	P_{pl}		P_{cpl}		P_{pl}^{sh}		P_{cpl}^{sh}	
		iterações	nós	iterações	nós	iterações	nós	iterações	nós
32	300	18.468	1.803	23.580	4.316	2.555	1.643	2.089	1.318
	500	2.116	245	1.504	661	975	107	734	107
	700	38.449	3.674	35.394	9.968	4.273	3.031	7.929	6.129
	1100	41.569	3.487	43.812	13.124	3.201	2.341	9.153	7.847
	1500	10.873	728	9.324	3.140	1.325	485	2.530	1.824
64	700	899.179	66.453	854.858	152.713	57.514	53.805	98.605	99.773
	1100	3.671.783	219.988	4.502.517	853.922	165.513	157.855	443.126	448.124
	2300	4.257.037	178.084	5.286.230	1.039.903	127.313	125.988	376.372	382.346
	2700	1.249.919	50.314	1.710.312	279.090	30.645	31.784	82.922	84.137
	3500	299.885	13.794	420.921	70.355	9.010	8.405	22.440	13.565

Observamos que as formulações compactas, de um modo geral, apresentam resultados piores que as não compactas. A provável causa é que para a resolução das relaxações os algoritmos necessitam inserir variáveis de folga. Os modelos compactos possuem dimensão cheia, isto é, não possuem variáveis redundantes, ao contrário dos modelos não compactos. Assim é mais fácil para o algoritmo trabalhar com formulações em que as variáveis de folga já fazem

parte do modelo. Entretanto, nas formulações de dimensão cheia é mais fácil de identificar cortes. O uso de cortes é uma ferramenta importante para acelerar o cálculo da solução ótima.

Comparando os modelos P_{pl} e P_{cpl} (clássicos) com as formulações P_{pl}^{sh} e P_{cpl}^{sh} (Sherali, 2001), notamos que em todos os casos o número de iterações executados pelo otimizador para resolver os problemas do segundo grupo é menor (e em alguns casos muito menor) que os do primeiro. Entretanto, o número de nós do segundo grupo é maior que do primeiro nos casos assinalados. Com isso concluímos que nos casos estudados as formulações P_{pl}^{sh} e P_{cpl}^{sh} devem sempre ser utilizadas quando os recursos para execução do algoritmo são grandes, pois apresentam um número de iterações menor, que reflete em um tempo de execução menor. Quando a memória para a execução do algoritmo é limitada, as formulações compactas devem ser evitadas pois geram mais nós, que implica em um uso maior de memória.

A formulação P_{pl}^{sh} apresentou os melhores resultados que as outras formulações tanto em iterações como em nós, devendo ser a utilizada se o otimizador utilizar apenas o algoritmo de *branch-and-bound* puro. Caso o otimizador possua uma tecnologia mais avançada de resolução, como a geração de cortes, uma análise mais detalhada deve ser feita comparando os desempenhos das formulações originais com as com cortes.

5. Conclusões

As experimentações numéricas nos mostraram que diferentes formulações para o mesmo problema levam a tempos de execução e uso de memória diferentes. O modelo de linearização de Sherali apresenta resultados melhores que o apresentado na Equação 3, mesmo quando os sistemas são acoplados por outras restrições.

Dentre as formulações estudadas, P_{pl}^{sh} tem o melhor desempenho, devendo ser sempre utilizada quando o otimizador não possuir recursos avançados de resolução de problemas de programação inteira mista.

Para trabalhos futuros, propomos investigar a influência da geração de cortes nos modelos, em suas formulações compactas e não compactas.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo ANP e da Financiadora de Estudos e Projetos FINEP por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás PRH-34-ANP/MCT.

6. Referências

- BUITARGO, S., RODRIGUEZ, E., ESPIN, D., INTEVEP, S.A., Global Optimization Techniques in Gas Allocation for Continuous Flow Gas Lift System, *Gas Technology Conference*, p.375-383, (1996).
- CAMPONOGARA, E., Optimizing Gas-Lift Production of Oil Wells: Piecewise Linear Formulation and Computational Analysis, *Relatório Técnico, Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina*, 2005a.
- CAMPONOGARA, E., NAKASHIMA, P., Solving a gas-lift optimization problem by dynamic programming, *Accepted to appear in European Journal of Operational Research*, 2005b.
- KANU, E. P., MACH, J., BROWN, K.E., Economic Approach to Oil Production and Gas Allocation in Continuous Gas Lift. *Journal of Petroleum Technology*, p.1887-1892, 1981.
- MARTÍNEZ, E. R., MORENO, W. J., MORENO, J. A., MAGGIOLI, R., Application of Genetic Algorithm on the Distribution of Gas Lift Injection. *SPE Latin America/Caribbean Petroleum Engineering Conference*, 1994.
- NAKASHIMA, P., CAMPONOGARA, E. Optimization of Lift-Gas Allocation Using Dynamic Programming, *Accepted to appear in IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Part A, 2005
- NISHIKIORI, N., REDNER, R. A., DOTU, D. R., SCHIMIDT, Z. An Improved Method for Gas Lift Allocation Optimization. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1989.
- PADBERG, M., Approximating Separable Nonlinear Functions via Mixed Zero-One Programs. *Operations Research Letters*, v.27, n.1, p.1-5, 2000.
- SHERALI, H. D. On Mixed-Integer Zero-One Presentations for Separable Lower-Semicontinuous Piecewise-Linear Functions. *Oper. Res. Lett.*, v.28, n.1, p.155-160, 2001.
- WOLSEY, L. A., NEMHAUSER, G. L., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience Publisher, (1999)