

EFEITOS DA DIFUSÃO EM MODELOS MATEMÁTICOS PARA COMBUSTÃO IN-SITU EM MEIOS POROSOS

G. Chapiro¹ (IMPA), D. Marchesin² (IMPA)

¹ 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil; grigori@fluidimpa.br

² 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil; marchesin@fluidimpa.br

Resumo: A combustão in-situ é uma técnica com potencial para exploração de reservatórios de óleos pesados. Injeta-se ar e usa-se componentes pesados e imóveis do óleo como combustível para gerar o calor necessário para diminuir a viscosidade do óleo. Assim o aumento da temperatura perto da frente de combustão e o transporte de energia térmica resultante tem grande impacto na recuperação.

Considera-se um cilindro de rocha porosa com combustível sólido distribuído uniformemente, inicialmente preenchido com ar injetado a uma taxa constante pelo lado esquerdo do cilindro. Entre o oxigênio injetado e o combustível sólido ocorre uma reação bimolecular que produz calor e que consome oxigênio e o combustível. Desprezamos a compressibilidade do ar e consideramos o cilindro termicamente isolado nas direções ortogonais ao escoamento. A taxa de combustão em função da temperatura é dada pela lei de Arrhenius.

Existem alguns modelos matemáticos diferentes que descrevem o mesmo fenômeno físico. Neste trabalho encontramos as soluções para alguns destes modelos desenvolvidos em trabalhos passados para modelos de combustão “co-flow” e “counter-flow”. Determinamos possíveis seqüências de ondas com ou sem combustão. Levamos em consideração várias condições de extinção da combustão, como por exemplo, falta de combustível, consumo completo de oxigênio ou temperaturas baixas. Estamos interessados em encontrar soluções destes sistemas de equações diferenciais parciais para a onda de combustão na forma de uma onda viajante. O objetivo deste trabalho é discutir a importância dos termos difusivos para a solução em cada um destes modelos.

Combustão “co-flow”, Meios porosos, Ondas viajantes.

1. INTRODUÇÃO

Embora a técnica in-situ é considerada de grande potencial para a recuperação e produção de óleos pesados [6,16] (veja também [14,15]) ela ainda representa apenas uma pequena parcela do total de técnicas utilizadas de recuperação térmica. A explicação é (i) abundância até um passado recente das reservas de fácil exploração de óleos leves, recursos de maior qualidade e de exploração mais barata. (ii) sucesso operacional de métodos de injeção de vapor em grandes reservatórios de óleos pesados. Porém, a maior parte da produção de petróleo do Brasil é marítima e a injeção de vapor no fundo do mar é difícil do ponto de vista técnico.

A maior dificuldade operacional durante o processo de combustão in-situ é o comportamento sensível da frente de combustão sob condições de reservatório variáveis e controle limitado do processo. Por isso é necessário estudá-lo em detalhes. Em geral a frente de combustão é modelada por uma onda viajante. Este trabalho visa obter métodos analíticos para o cálculo dessas ondas.

Vários estudos sobre a estrutura da frente de combustão foram feitos desde a década de 50 sobre o tema, por exemplo veja [1,2,3,4,5,7,13,17]. Porém, nenhum destes estudos levou em conta outras ondas que ocorrem na frente de combustão, nem interação entre elas. Como há interação entre a onda de combustão e outras ondas que aparecem no problema, resolve-lo levando em conta todas as ondas é relevante. O primeiro estudo nesta direção foi feito em [18], veja também [8,9,10].

Em outros trabalhos [12,15] modelos similares ao [18] foram analisadas. Para resolver o problema de Riemann correspondente e encontrar o perfil da onda de combustão algumas simplificações são comuns. Algumas delas são relacionadas aos termos difusivos que aparecem nas leis de balanço de temperatura e da massa de gás. Por exemplo, podemos considerar o número de Lewis grande como feito em [12]. Neste trabalho mostraremos uma simplificação possível na qual todos termos difusivos são desprezados. Também resolveremos o problema de Riemann correspondente, obtendo o perfil de onda de combustão praticamente idêntico ao obtido usando modelo mais complexo contendo todos os termos difusivos e que usa técnicas de expansões assintóticas.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1 Formulação

Seguindo os trabalhos [1,18] suponhamos que ar é injetado pelo lado esquerdo do cilindro de rocha porosa, isolado térmica e mecanicamente do meio. O cilindro contém combustível sólido de tal forma que o

escoamento da massa e de energia vai ser considerado unidimensional. O nosso modelo é composto de leis adimensionais de balanço para energia total e para as massas totais de gás, de oxigênio e de combustível. Definimos a densidade ρ_f do combustível sólido por unidade do volume e introduzimos o combustível consumido como $\eta(x,t) = 1 - \rho_f(x,t)/\rho_f^o$ (aqui ρ_f^o é a concentração inicial do combustível), assim $\eta = 0$ corresponde a reservatório cheio de combustível e $\eta = 1$ a ausência de combustível. As principais variáveis dependentes são a temperatura $\theta(x,t)$, reescalada de tal maneira que $\theta = 1$ corresponde à temperatura do reservatório, concentração do oxigênio na fase gasosa $Y(x,t)$ e $\eta(x,t)$. Introduzimos também a densidade de gás $\rho_g(\theta, p)$ que é descrita pela lei dos gases ideais em termos da temperatura e da pressão do gás total $p(x,t)$. A velocidade Darcy $v(x,t)$ é o fluxo volumétrico do gás pela unidade de área.

Com algumas simplificações a equação adimensional de estado para o gás fica $\rho\theta = 1$, que podemos obter a partir da equação de gases ideais, onde ρ é a densidade adimensional de gás.

Após a introdução das variáveis adimensionais para tempo e espaço em [1,18] foi obtido que o fluido modelado pelas equações adimensionais de balanço e a equação de estado são:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial (a\rho v \theta)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q\Phi, \quad (1)$$

$$\phi \frac{\partial (Y\rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v Y)}{\partial x} = \frac{1}{L_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \mu\Phi, \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = \mu_g \Phi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \Phi, \quad (4)$$

$$\rho\theta = 1; \quad (5)$$

onde $\Phi(\theta, Y, \eta)$ é a taxa de reação. Os nomes e os valores típicos de parâmetros a , q , ϕ , L_e , α , γ , μ , e μ_g são dados na Tabela 1. Os domínios físicos das variáveis dependentes $U = (\theta, Y, \eta, v)$ são dados por:

$$\theta \geq 0, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad v > 0. \quad (6)$$

Também queremos que a combustão termine na temperatura do reservatório ou então na ausência de oxigênio ou de combustível, i.e., quando pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita: $\theta = 1$, $Y = 0$ ou $\eta = 1$. Essa condição impõe algumas restrições adicionais na forma da taxa de reação Φ .

Quantidades físicas	Símbolo	Valor
Calor total do meio poroso	q	1.0121
Coefficiente estequiométrico adimensional de oxigênio	μ	205.8
Coefficiente estequiométrico adimensional do gás	μ_g	68.19
Número de Lewis (relação das difusões térmica e molecular)	L_e	0.214
Número de Arrhenius (energia de ativação adimensional)	γ	23.69
Coefficiente de reação adimensional	α	0.027
Capacidade de calor volumétrica do gás	a	$6.13 \cdot 10^{-4}$
Porosidade do meio	ϕ	0.3

Tabela 1. Valores típicos de parâmetros adimensionais. Fonte: [1].

2.2. Onda de combustão simples

Neste trabalho analisaremos o modelo mais simples que o (1)-(4):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial (a\rho v \theta)}{\partial x} = q\Phi, \quad (7)$$

$$\phi \frac{\partial (Y\rho)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v Y)}{\partial x} = -\mu\Phi, \quad (8)$$

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = \mu_g \Phi, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \Phi, \quad (10)$$

$$\rho \theta = 1. \quad (11)$$

Usamos a lei da ação das massas combinada com a lei de Arrhenius para obter a taxa de combustão:

$$\Phi = \alpha Y(1-\eta) \exp\left(-\frac{\gamma}{\theta}\right), \quad \theta > 0 \quad ; \quad \Phi = 0, \quad \theta \leq 0. \quad (12)$$

Estamos interessados em estudar a onda de combustão que se propaga na direção do escoamento do gás com a velocidade $V > 0$. Fisicamente, não há combustão na frente e atrás da onda de combustão, i.e., a taxa de reação Φ tem que se anular. Atrás da frente de combustão consideramos que não há combustível impondo:

$$\theta^b > 0, \quad Y^b = 1, \quad \eta^b = 1, \quad v^b > 0, \quad (13)$$

onde o superscrito b representa o estado queimado (de “burned” em inglês). Antes da frente de combustão consideramos que não há combustão por falta de oxigênio:

$$\theta^u > 0, \quad Y^u = 0, \quad \eta^u = 0, \quad v^u > 0; \quad (14)$$

onde o superscrito u representa o estado não queimado (de “unburned” em inglês).

Estudaremos a frente de combustão como uma onda viajante estacionária do sistema (1)–(4) com a velocidade de propagação $V > 0$. Os valores das funções de estado ao longo desta onda de combustão dependem somente das coordenadas móveis $\xi = x - Vt$, i.e., $\theta(x, t) = \hat{\theta}(\xi)$, $Y(x, t) = \hat{Y}(\xi)$ e $\eta(x, t) = \hat{\eta}(\xi)$. Assim, podemos reescrever as equações (7)–(11) na forma (15)–(18), omitindo “^”:

$$\frac{d}{d\xi}(av - V\theta) = q\Phi, \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{Y(v - \phi V)}{\theta}\right) = -\mu\Phi, \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{v - \phi V}{\theta}\right) = \mu_g\Phi, \quad (17)$$

$$\frac{d}{d\xi}(V\eta) = -\Phi, \quad (18)$$

onde (11) foi usada para eliminar ρ . As condições de fronteira para o sistema (15)–(18) são (13) em $-\infty$ e (14) em $+\infty$.

Agora notemos que (15)–(18) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem que pode ser reescrito na forma matricial equivalente:

$$\begin{bmatrix} -V & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{V\phi - v}{-\theta} & 0 & 0 \\ \frac{(V\phi - v)}{\theta^2} + \frac{V}{a\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_\xi \\ Y_\xi \\ \eta_\xi \\ v_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ -\mu - Y\mu_g \\ \mu_g \frac{q}{a\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \Phi. \quad (19)$$

Impondo seguintes restrições:

$$V \neq 0 \equiv \lambda^\eta, \quad V \neq v/\phi \equiv \lambda^Y, \quad V \neq av/(\theta + a\phi) \equiv \lambda^\theta, \quad (20)$$

podemos reescrever o sistema (19) como:

$$[\theta_\xi, Y_\xi, \eta_\xi, v_\xi]^T = \Phi \left[\frac{\theta(a\theta\mu_g - q)}{a(V\phi - v) + V\theta}, \frac{\mu + \mu_g Y}{V\phi - v}, -\frac{1}{V}, \frac{q(V\phi - v) + V\theta^2\mu_g}{a(V\phi - v) + V\theta} \right]^T. \quad (21)$$

Provaremos que o sistema de EDOs (21) possui solução com as condições de fronteira definidas por (13) e (14) para certos valores de V .

3. AS CURVAS DE RANKINE-HUGONIOT

Para obter relação entre as condições de fronteira (13) e (14) de tal forma que (21) possua uma solução podemos substituir (18) em (15)–(17) obtendo:

$$\frac{d}{d\xi}(av - V\theta + qV\eta) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{(v - \phi V)Y}{\theta} - \mu V\eta\right) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{v - \phi V}{\theta} + \mu_g V \eta \right) = 0. \quad (24)$$

Isto significa que as funções dentro da derivada são constantes em ξ , logo podemos calcular o limite $\xi \rightarrow \infty$ e igualá-lo ao valor desta função para um ξ arbitrário:

$$av - V\theta + qV\eta = av^u - V\theta^u - qV\eta^u, \quad (25)$$

$$\frac{vY}{\theta} - \frac{\phi VY}{\theta} - \mu V\eta = \frac{v^u Y^u}{\theta^u} - \frac{\phi VY^u}{\theta^u} - \mu V\eta^u, \quad (26)$$

$$\frac{v}{\theta} - \frac{\phi V}{\theta} + \mu_g V\eta = \frac{v^u}{\theta^u} - \frac{\phi V}{\theta^u} + \mu_g V\eta^u. \quad (27)$$

Em seguida tomando o limite $\xi \rightarrow -\infty$ do lado esquerdo de (22)-(24) e usando (13)-(14), obtemos:

$$av^u - V\theta^u = av^b - V\theta^b + qV, \quad (28)$$

$$0 = \frac{v^b - \phi V}{\theta^b} - \mu V, \quad (29)$$

$$\frac{v^u - \phi V}{\theta^u} = \frac{v^b - \phi V}{\theta^b} + \mu_g V. \quad (30)$$

Fisicamente é razoável supor que conhecemos a temperatura θ^u na frente da onda de combustão e a velocidade de injeção do gás atrás da onda v^b - velocidade de Darcy. Essa escolha de parâmetros nos será útil na seção 5. Assim temos três incógnitas θ^b , v^u , V e três equações (28)-(30). De (29):

$$\theta^b = \frac{v^b - \phi V}{\mu V}. \quad (31)$$

Subtraindo (29) de (30):

$$v^u = \phi V + V\theta^u (\mu + \mu_g). \quad (32)$$

Agora substituímos (31) e (32) em (28) e obtemos:

$$\mu V\theta^u + \mu av^b - v^b + \phi V + \mu qV - a\mu\phi V = a\mu(\mu + \mu_g)V\theta^u. \quad (33)$$

Podemos definir $J(\theta^u) = \mu\theta^u + \mu q - \phi a\mu + \phi - a\mu^2\theta^u - a\mu\mu_g\theta^u$; notemos que $J(\theta^u) > 0$ para os valores das constantes dadas na Tabela 1, para todo $\theta^u > 0$. Usando este $J(\theta^u)$, encontramos V de (33):

$$V = \frac{(1 - a\mu)v^b}{J(\theta^u)}. \quad (34)$$

Assim, temos θ^b e v^u definidos em (31) e (32) como funções de θ^u e $V = V(\theta^u, v^b)$ definido em (34).

4. PERFIL DA ONDA DE COMBUSTÃO

Nesta seção usaremos as condições de fronteira definidas na seção 3 e equações (25)-(27) para obter θ , Y , v como funções de η e dos parâmetros, substituindo os resultados na equação para η_ξ em (21). Em seguida compararemos qualitativamente os resultados obtidos com os resultados para o sistema (1)-(5) obtidos usando técnicas de perturbação singular em [8,9].

4.1. Perfil da onda de combustão sem difusão

Das equações (25)-(27) podemos obter:

$$av - V\theta = av^u - V\theta^u - qV\eta, \quad (35)$$

$$\frac{(v - \phi V)}{\theta} Y = \mu V\eta, \quad (36)$$

$$v = \phi V - \mu_g V\eta\theta + \frac{\theta}{\theta^u} (v^u - \phi V) = \phi V - \mu_g V\eta\theta + V\theta(\mu + \mu_g), \quad (37)$$

onde usamos (32). Substituindo v de (37) e v^u de (32) em (35), dividindo por V e simplificando, obtemos:

$$\theta = \frac{a\theta^u(\mu + \mu_g) - \theta^u - q\eta}{a(\mu + \mu_g - \mu_g\eta) - 1}. \quad (38)$$

Usando (37) em (36) temos:

$$Y = \frac{\mu\eta}{\mu + \mu_g - \mu_g\eta}. \quad (39)$$

Finalmente usando (38) e (39) podemos reescrever as equações para η_ξ em (21) como:

$$\eta_\xi = \frac{Y(1-\eta)}{-V} \exp\left(\frac{-\gamma}{\theta}\right) = \frac{-\mu\eta(1-\eta)}{(\mu + \mu_g - \mu_g\eta)V} \exp\left(\gamma \frac{1 - a(\mu + \mu_g - \mu_g\eta)}{a\theta^u(\mu + \mu_g) - \theta^u - q\eta}\right). \quad (40)$$

Podemos resolver a EDO (40) com qualquer condição inicial $\eta(0) = \eta^0$, onde $0 < \eta^0 < 1$ e substituir o resultado nas equações para θ , Y e v obtendo o perfil da onda de combustão. Resolvendo numericamente estas equações usando o programa Matlab com as condições iniciais $\eta^0 = 0.5$, obtemos o perfil que pode ser visto na Figura 1.

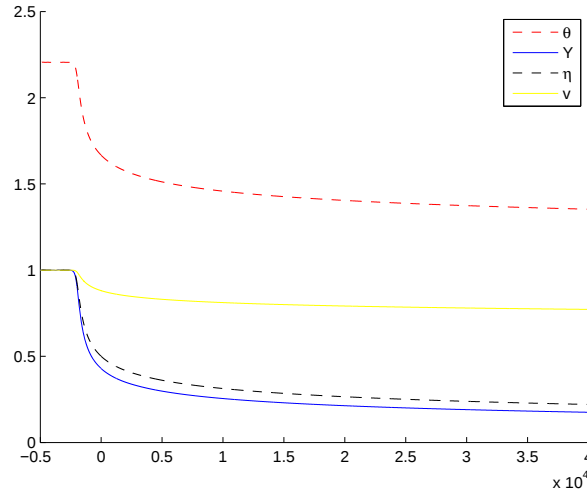


Figura 1. Variáveis θ , Y e η são funções de ξ .

Para validar esta solução foi mostrado em [11] que as restrições (20) são satisfeitas para todo $V > 0$.

A EDO (40) foi resolvida numericamente, porem algumas vezes é conveniente haver uma solução analítica aproximada e explicita. Para obter esta aproximação vamos substituir o fator exponencial em (40) por uma constante E :

$$\eta_\xi = \frac{-\mu\eta(1-\eta)}{(\mu + \mu_g - \mu_g\eta)V} E. \quad (41)$$

Neste caso o fator exponencial do lado direito de (40) pertence a algum intervalo $[E^u, E^b]$ e nos podemos resolver (41) substituindo E por E^u e E^b para obter soluções $\eta_u(\xi)$ e $\eta_b(\xi)$, respectivamente. Usando a teoria de EDO básica podemos provar que a solução $\eta(\xi)$ de (40) satisfaz $\eta_u(\xi) < \eta(\xi) < \eta_b(\xi)$.

Para obter E^u e E^b suponhamos que a função $\theta(\xi)$ é monótona e que $\theta^u \leq \theta(\xi) \leq \theta^b$ (este fato foi mostrado em [11]). Como a exponencial é uma função crescente, temos

$$E^u \equiv \exp\left(-\frac{\gamma}{\theta^u}\right) \leq \exp\left(-\frac{\gamma}{\theta(\xi)}\right) \leq \exp\left(-\frac{\gamma}{\theta^b}\right) \equiv E^b.$$

Reescrevendo os coeficientes pre-exponenciais da equação (40) como:

$$\frac{-\mu\eta(1-\eta)}{(\mu + \mu_g - \mu_g\eta)V} = \frac{-\eta(1-\eta)}{(1 + \mu_g/\mu - \mu_g\eta/\mu)V} = \frac{-\eta(1-\eta)}{(1 + K - K\eta)V},$$

onde $K = \mu_g/\mu$. Agora podemos resolver (41):

$$\int_{\eta^0}^{\eta} \frac{KV\eta - V(1+K)}{\eta(1-\eta)} d\eta = \int_0^{\xi} E d\xi. \quad (42)$$

Integrando (42), temos:

$$\left(\frac{1-\eta}{\eta^{K+1}}\right)^V (\eta^0)^{VK} = e^{E\xi}, \Rightarrow \frac{1-\eta}{\eta^{K+1}} = (\eta^0)^{-K} e^{E\xi/V}. \quad (43)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\eta^{-K-1} - \eta^{-K} = (\eta^0)^{-K} e^{E\tilde{\theta}V}. \quad (44)$$

Podemos resolver (44) em ξ . O resultado é comparado a solução numérica (40) obtida anteriormente na Figura 2. Como pode ser visto na Figura 2, o perfil da solução é semelhante à aproximação que usa $E = E^b$ à esquerda e é semelhante à aproximação que usa $E = E^u$ à direita.

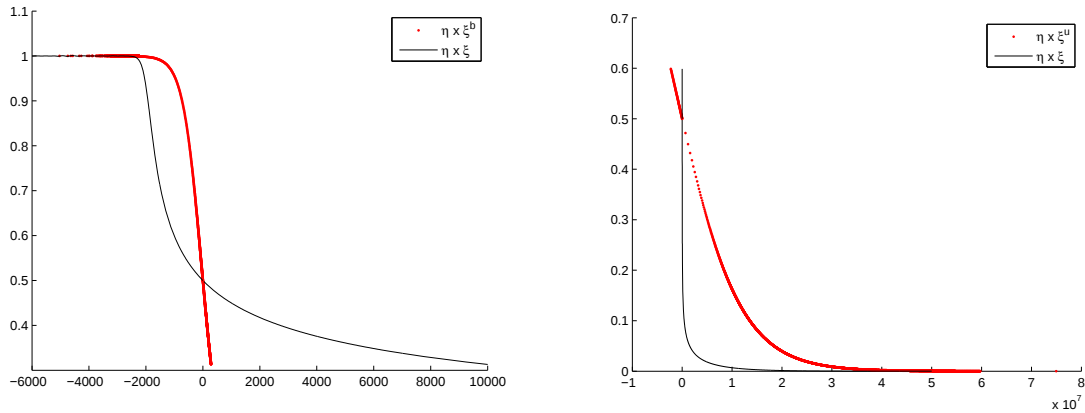


Figura 2. Comparação entre a solução numérica de (40) (linha continua) e solução da EDO aproximada (pontilhada); θ^b a esquerda e θ^u a direita.

4.2. Perfil de onda de combustão no caso geral

Em [10] o perfil de onda de combustão foi obtido usando a técnica de perturbação singular, veja Figura 3. Comparando os resultados com Figura 1 podemos ver que eles descrevem fenômenos qualitativamente semelhantes.

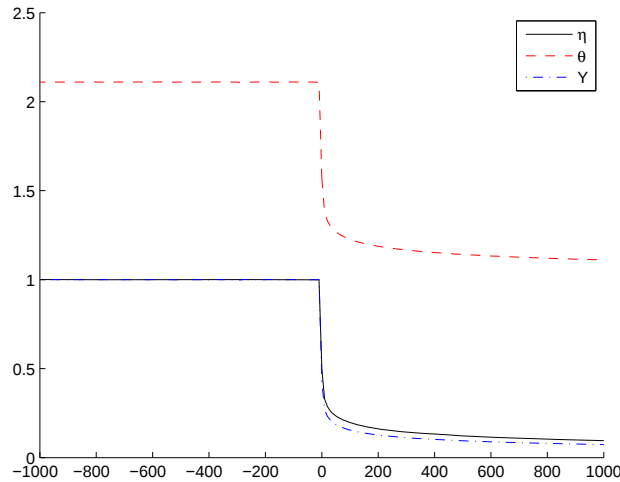


Figura 3. Variáveis θ , Y e η são funções de ξ .

5. ONDAS SEM COMBUSTÃO E SEQUÊNCIAS DE ONDAS

Na ausência de combustão os termos fonte que representam a troca de massas entre as componentes durante a combustão e contém o fator Φ se anulam no sistema (7)–(11). É claro que Φ anula-se para $Y \equiv 0$ ou $\eta \equiv 1$. Consideremos que as soluções são lisas; expandimos as derivadas nos termos que sobram em (7)–(10), manipulando (8), (9) e usando (11) para eliminar ρ , obtemos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (45)$$

$$\phi \frac{\partial Y}{\partial t} + v \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

$$\left(\frac{\theta}{a} + \phi\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (48)$$

Assim os possíveis valores das velocidades características do sistema (45)-(48) (na ordem crescente) e os vetores característicos correspondentes são:

$$\lambda^\eta = 0, \quad (0, 0, 1, 0)^T, \quad (49)$$

$$\lambda^\theta = a \frac{v}{\theta + a\phi}, \quad (1, 0, 0, \frac{v}{\theta + a\phi})^T, \quad (50)$$

$$\lambda^Y = v/\phi, \quad (0, 1, 0, 0)^T. \quad (51)$$

É fácil ver que todas as velocidades características são constantes ao longo das curvas integrais definidas pelos respectivos campos de vetores característicos. Isto quer dizer que todas elas estão associadas a descontinuidades (ou ondas) de contato e que satisfazem as relações de Rankine-Hugoniot para (7)-(11). A velocidade característica λ^η corresponde a uma descontinuidade imóvel ao longo da qual somente η varia, λ^θ corresponde a uma descontinuidade de temperatura ao longo da qual variam θ e v e finalmente λ^Y corresponde à descontinuidade de composição de gás ao longo da qual varia somente Y .

Em [18] a mesma seqüência de ondas foi obtida, o modelo usado foi (1)-(5) e foi considerado o comportamento da onda em grandes escalas espaciais, o que faz com que todas as segundas derivadas tendam a zero. Também foi mostrado que as velocidades em (49)-(51) são todas diferentes.

Podemos então descrever a seqüência de ondas na solução de Riemann com as condições (13) e (14) da frente de combustão. No caso que estamos estudando (combustão na mesma direção do escoamento ou “co-flow”) a onda térmica precede a onda de combustão ($\lambda^\theta(U^b) < V$) e $\theta^b > \theta^u$. Por causa das desigualdades $\lambda^\eta < \lambda^\theta < \lambda^Y$ a seqüência de ondas na solução do problema de Riemann consiste em um choque imóvel de combustível, um choque térmico com velocidade λ^θ , uma onda de combustão com velocidade V e uma onda de choque de composição de gás com velocidade λ^Y . Efetivamente, esta última não existe visto que o oxigênio é completamente consumido segundo hipótese da condição de fronteira (14). Esquemáticamente esta seqüência de ondas pode ser representada como:

$$U^i \xrightarrow{\lambda^\eta} U^1 \xrightarrow{\lambda^\theta} U^b \xrightarrow{V} U^u. \quad (52)$$

O estado $U^i = (\theta^i, 1, 0, v^i)$ representa a condição de injeção, $U^1 = (\theta^i, 1, 1, v^i)$ é o estado intermediário na região depois de combustão, os estados $U^b = (\theta^b, 1, 1, v^b)$ e $U^u = (\theta^u, 0, 0, v^u)$ são os estados queimado e não queimado respectivamente, cercado a onda de combustão.

O seguinte teorema define formulas para todos os estados e também as velocidades para a onda de combustão e para as ondas sem combustão na seqüência de ondas (52) da solução do problema de Riemann. Neste teorema a temperatura inicial do reservatório é considerada fixa $\theta^u = 1$.

Teorema 1: Supondo que na seqüência de ondas que aparece na solução do problema de Riemann (7)-(12) exista uma onda de combustão movendo-se na direção do escoamento com condições de fronteira à esquerda e à direita satisfazendo (13)-(14) com $\theta^b > \theta^u$. Dadas a condições de injeção $U^i = (\theta^i, 1, 0, v^i)$, com $\theta^i > 0$, $v^i > 0$ com a temperatura do reservatório θ^u , então todos os estados constantes, as velocidades de todas as ondas da seqüência de ondas (52) são unicamente determinadas.

Demonstração. Primeiramente notemos que junto com (50) temos quatro equações independentes (as outras são (31), (32) e (34)) para os seis parâmetros θ^b , θ^u , θ^i , v^b , v^u e v^i , logo o resultado do teorema é plausível. Analisando a Fig. 4 podemos ver que as velocidades das ondas e os estados intermediários na seqüência (52) podem ser determinadas do seguinte modo. Substituindo θ^b de (31) em (50) segue que

$$\begin{aligned} a \frac{v^i}{\theta^i + a\phi} &= a \frac{v^b}{\theta^b + a\phi}; \\ \left(a\phi + \frac{v^b - \phi V}{\mu V} \right) v^i &= a v^b (\theta^i + a\phi); \\ v^b &= \frac{\phi V (a\mu - 1) v^i}{\mu V (\theta^i + a\phi) - v^i}. \end{aligned} \quad (53)$$

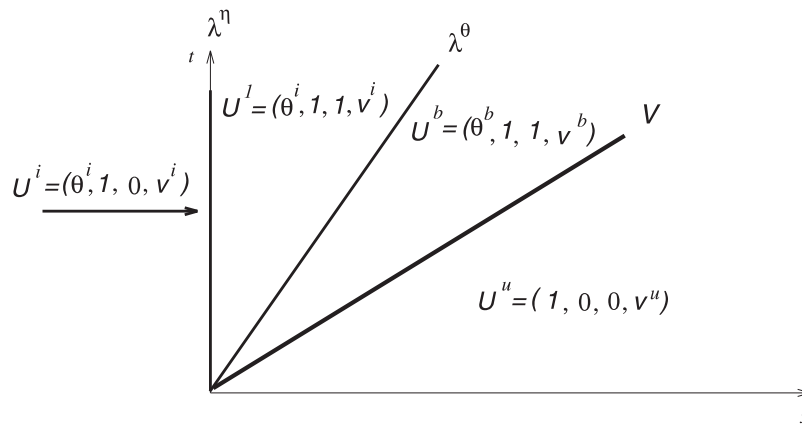


Figura 4. Regiões separadas pelas ondas imóvel, térmica e de combustão da solução de Riemann. Valores de θ , Y , η e v em cada região.

Usando v^b de (53) e usando (34) obtemos V ; em seguida usamos (31) e (32) para obter θ^b e v^u como funções de θ^i , θ^u e v^i . Isso completa a demonstração do Teorema 1.

Como as ondas de combustão e térmica são muito lentas, notemos que elas levam muito tempo para se separar, enquanto a onda de composição de gás (extremamente rápida) separa-se das outras imediatamente. Isto explicaria porque este fenômeno não foi detectado em experiências de laboratório, onde é comum observar efeitos transientes e não assintóticos.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho mostramos um exemplo simples e interessante de um modelo de combustão gás-sólido em meio poroso sem difusão na direção do escoamento. Obtivemos o perfil da onda de combustão e resolvemos o problema de Riemann correspondente. Comparando estes resultados aos obtidos em outros trabalhos podemos concluir que os efeitos dos termos difusivos não afetam qualitativamente a propagação da onda de combustão.

7. REFERÊNCIAS

- [1] AKKUTLU, I.Y., YORTSOS, Y.C., *The Effect of Heterogeneity on In-situ Combustion: The Propagation of Combustion Fronts in Layered Porous Media*, **J. Pet. Tech.**, **54**, 6:56-56, 2002.
- [2] AKKUTLU, I.Y., YORTSOS, Y.C., *The Dynamics of In-situ Combustion Fronts in Porous Media*, **J. of Combustion and Flame**, **134**, 229-247, 2003.
- [3] ALDUSHIN, A.P., RUMANOV, I.E., MATKOWSKY, B.J., *Maximal Energy Accumulation in a Superadiabatic Filtration Combustion Wave*, **Combustion and Flame**, **118**, 76-90, 1999.
- [4] BAILY, H.R., LARKIN, B.K., *Conduction-convection in Underground Combustion*, **Petroleum Trans. AIME**, **217**, 321-331, 1960.
- [5] BENHAM, A.L., POETTMANN, F.H., *The Thermal Recovery Process – An Analysis of Laboratory Combustion Data*, **Petroleum Trans. AIME** **213**: 406-408, 1958.
- [6] BOBERG, T.C., *Thermal Methods of Oil Recovery*, **An Exxon Monograph Series**, 1988.
- [7] BOUSAID, I.S., RAMEY, JR., H.J., *Oxidation of Crude Oil in Porous Media*, **Soc. Pet. Eng. J.**, **8**, 2:137-148, 1968.
- [8] CHAPIRO, G., *Singular Perturbation Applied to Combustion Waves in Porous Media (in Portuguese)*, **MSc Thesis, IMPA**, 2005. (Preprint version in http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_B/2005/9.html)
- [9] CHAPIRO, G., MAILYBAEV, A. A., MARCHESIN, D., SOUZA, A.J., *Singular Perturbation in Combustion Waves for Gaseous Flow in Porous Media*, **Proceedings of the XXVI CILAMCE**, 2005.
- [10] CHAPIRO, G., MAILYBAEV, A. A., MARCHESIN, D., SOUZA, A.J., AKKUTLU, Y., *Global Asymptotic Effects of the Structure of Combustion Wave in Insulated Porouse Media: Singular Perturbation Analysis*, **In preparation**, 2007.
- [11] CHAPIRO, G., MARCHESIN, D., *Non-Diffusive combustion Waves in Insulated Porouse Media*, **in preparation** 2007.
- [12] HORNIBROOK, J., BALASURIYA, LAFORTUNE, S. *High Lewis Number Combustion Wavefronts*, **preprint**, 2005.
- [13] KUMAR, M., GARON, A.M., *An Experimental Investigation of the Fireflooding Combustion Zone*, **Soc. Pet. Eng. Res. Eng.**, **6**, 1:55-61, 1991.

- [14] MOTA, J.C., MARCHESIN, D., DANTAS, W.B., *Combustion Fronts in Porous Media*, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, **62**, 6:2175-2198, 2002.
- [15] MOTA, J.C., SOUZA, A.J, GARCIA, R.A., TEIXEIRA, P.W., *Oxidation Fronts in a Simplified Model for Two-Phase Flow in Porous Media*, **Matemática Contemporânea**, **22**, 67-82, 2002.
- [16] PRATS, M., *Thermal Recovery*, **SPE Monograph Series SPE of AIME**, 1982.
- [17] SCHULT, D. A., BAYLISS, A., MATKOWSKY, B. J., *Traveling Waves in Natural Counterflow Filtration Combustion and Their Stability*, **SIAM J. Appl. Math**, **58**, 3:806-852, 1998.
- [18] SOUZA, A. J., MARCHESIN, D., AKKUTLU, I. Y., *Wave Sequences For Solid Fuel Adiabatic In-Situ Combustion in Porous Media*, **Comp. Appl. Math**, **25**, 1:27-54, 2006.

DIFFUSION EFFECTS IN MATHEMATICAL MODELS FOR IN-SITU COMBUSTION IN POROUSE MEDIA

ABSTRACT: Air injection and in-situ combustion have long been considered as potential techniques for displacement and recovery of heavy oil. They utilize heavy and immobile components of the crude oil as fuel producing in-place the heat necessary for the recovery of upgraded crude oil.

We consider a porous rock cylinder with a homogeneously distributed solid fuel, initially filled with air that is injected at constant rate on the left end of the cylinder. A bimolecular reaction is assumed to take place between the injected oxygen and the solid fuel, hence the region of reaction behaves as a source of heat as well as a sink for the oxygen and the fuel. We neglect air compressibility and heat losses, and we consider the cylinder thermally insulated in directions orthogonal to the flow direction. The temperature dependence of the reaction rate in the combustion process given by Arrhenius' law is an exponential that tends slowly to zero at zero absolute temperature.

There are few different mathematical models we can use to describe this physical phenomenon. In this work we present some models developed in previous works applied to both co-flow and counter-flow combustion. We determine possible sequences of the combustion and the non-combustion waves present in the flow for various combustion zone conditions including cases when oxygen or fuel are completely consumed during the combustion or the combustion vanishes due to low temperature. Our interest is finding the solutions of these systems of partial differential equations for combustion wave as traveling waves. The goal of this paper is to show that qualitatively the diffusion terms have no importance for the solution in each of these models.

In-situ combustion, Conservation laws, Porous media

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste artigo.