

ESCALONAMENTO DE COMPRESSORES EM CAMPOS DE PETRÓLEO OPERADOS POR *GAS-LIFT*: FORMULAÇÃO LINEAR POR PARTES

Melissa Pereira de Castro, Eduardo Camponogara, Agostinho Plucenio

Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa Postal 476, Florianópolis, SC 88040-900, Brasil
{mely, camponog, plucenio}@das.ufsc.br

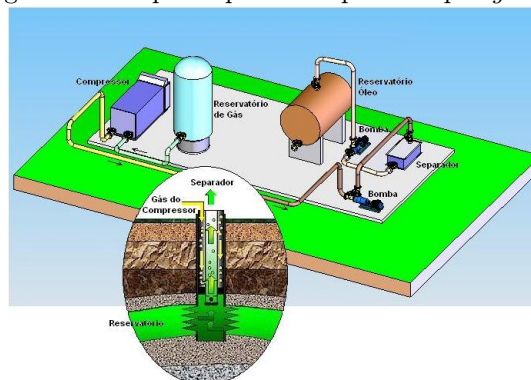
Quando a pressão interna do reservatório não é suficiente para impulsionar o óleo é comum fazer uso de técnicas de elevação artificial de forma a forçar o fluxo de petróleo até a superfície. Dentre as técnicas de elevação mais comuns encontra-se o *gas-lift*. O processo envolve basicamente a injeção de gás comprimido de alta pressão diretamente na base da coluna líquida do tubo de produção, de forma a reduzir sua densidade, forçando dessa forma o fluxo do fluido até as instalações da superfície, onde este será separado do petróleo podendo ser novamente comprimido e reinjetado. Cada poço possui taxas ótimas de injeção, requerendo assim níveis de compressão distintos. No problema de escalonamento de compressores deve-se optar por quais tipos de compressores e níveis de operação que serão alocados às demandas dos poços em campos de petróleo que operam com a técnica de elevação artificial *gas-lift*. É considerado um problema de otimização difícil, apresentando características de não-linearidade de algumas restrições e combinando aspectos de programação inteira mista. Os custos operacionais e de instalação caracterizam parte substancial do investimento em campos de petróleo que operam por *gas-lift*, constituindo os maiores custos de todo projeto. Mesmo assim o estudo mais detalhado das facilidades em superfície envolvidas no processo de elevação artificial por *gas-lift* ainda foi pouco explorado, encontrando-se carente de modelos formais e algoritmos capazes de produzir soluções ótimas globais. Qualquer redução nesta faixa de investimento resulta em ganhos para a indústria do petróleo. O artigo propõe uma formulação para o problema através de modelos em programação matemática lineares por partes, apresentando o resultado numérico encontrado com a aplicação dos modelos.

Escalonamento de Compressores, Programação Matemática, Linearização por Partes.

1 Introdução

Quando a pressão interna do reservatório não é suficiente para impulsionar o óleo é comum fazer uso de técnicas de elevação artificial de forma a forçar o fluxo de petróleo até a superfície. Entre as técnicas de elevação mais empregadas está o *gas-lift*. O processo de *gas-lift* envolve basicamente a injeção de gás comprimido de alta pressão diretamente na base da coluna líquida do tubo de produção (como ilustrado na Figura 1), de forma a reduzir sua densidade, forçando dessa forma o fluxo do fluido até as instalações da superfície, onde este será separado do petróleo podendo ser novamente comprimido e reinjetado [3].

Figura 1: Campo de petróleo operando por *gas-lift*



Cada poço possui taxas ótimas de injeção, requerendo assim níveis de compressão distintos [1]. O problema de escalonamento de compressores (PEC) visa alocar as facilidades de forma a atender o campo,

ou seja, os níveis de pressão e vazão exigidos por cada poço. Entretanto, não basta projetar os equipamentos com base na demanda inicial de *gas-lift*, já que com o decorrer do tempo as exigências de compressão variam à medida que a pressão do reservatório diminui [4]. Uma prática comum é estimar em quanto a pressão do campo irá variar ao longo do tempo, construindo assim uma prospecção conservadora de quanto a estação de compressão deverá ser ajustada.

Porém, a instalação de um compressor de capacidade maior que a exigida pelo poço obriga a um decréscimo de pressão de forma a atender precisamente a necessidade demandada, resultando em perdas energéticas, uma vez que o compressor está consumindo energia para disponibilizar gás a uma determinada pressão e vazão que está sendo sub-utilizada. Deseja-se portanto alocar os compressores de forma a garantir o atendimento dos poços com as menores perdas energéticas e reduzindo os custos associados.

Os custos operacionais e de instalação constituem parte substancial do investimento em campos de petróleo que operam por *gas-lift* [8], qualquer redução nessa faixa de investimento resulta em ganhos para a indústria do petróleo. Até o momento o problema de escalonamento de compressores tem recebido pouca atenção, encontrando-se carente de modelos formais e algoritmos capazes de assegurar a otimalidade global da solução [2]. Trabalhos típicos consideram as influências locais e fazem uso de simuladores no planejamento da alocação de tais facilidades.

É considerado um problema de otimização difícil, apresentando características de não-linearidade de algumas restrições e combinando aspectos de programação inteira mista [9]. Soma-se a isto o fato do problema ter sido pouco explorado e apresentar carência de bibliografia específica sobre o tema.

Através de um estudo mais formal do problema de escalonamento de compressores, busca-se desenvolver um modelo em programação matemática que caracterize bem a estrutura do problema. O desenvolvimento de uma ferramenta de suporte à tomada de decisão que garanta a qualidade da solução gerada não só implicará na redução de custos de investimento (aquisição de equipamento, economia em energia), bem como nos custos de operação do campo e no tempo de desenvolvimento do projeto. O potencial de se desenvolver métodos capazes de substituir procedimentos *ad-hoc* de planejamento da produção por sistemas mais eficazes de suporte à decisão, contribui para elevar o grau de eficiência em diversos segmentos da indústria.

2 Formulação do Problema de Escalonamento de Compressores

O problema de escalonamento de compressores pode ser visto como um problema de localização de facilidades, onde as facilidades seriam os compressores e os clientes os poços. Cada poço (cliente) possui uma demanda de vazão de gás q_i^w e de pressão p_i^w . Cada compressor (facilidade) entrega o gás a uma vazão q_j^c e com pressão $p_j^c(q_j^c)$, modelada como uma função não linear da vazão. A solução do problema indica quais as facilidades serão instaladas, a que taxas elas irão operar e quais os clientes atendidos pelas mesmas, sendo que cada cliente será atendido por precisamente uma facilidade. O objetivo é minimizar o custo total de instalação e de operação, atendendo as exigências, ou seja, a pressão de saída do compressor deve ser maior do que a pressão demandada por qualquer de seus clientes mais a perda de carga ao longo da tubulação, assim como a vazão total do compressor deve ser capaz de atender o total de vazão consumido por todos seus clientes. O modelo abaixo representa a formalização do problema em programação matemática.

$$P : \text{Minimize} \quad \sum_{j \in N} c_j y_j + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} d_j q_j^c p_j^c(q_j^c) \quad (1a)$$

Subject to :

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i \in M, j \in N_i \quad (1b)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i \in M \quad (1c)$$

$$p_j^c(q_j^c) \geq (p_i^w + l_{ij}) x_{ij}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (1d)$$

$$q_j^{c, \min} y_j \leq q_j^c \leq q_j^{c, \max} y_j, \quad j \in N \quad (1e)$$

$$\sum_{i \in M_j} q_i^w x_{ij} \leq q_j^c, \quad j \in N \quad (1f)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \quad (1g)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (1h)$$

onde:

- c_j é o custo de aquisição dos compressores e c_{ij} o custo de instalação das tubulações de uma facilidade j para um cliente i . Já d_j é o custo de manter a pressão $p_j^c(q_j^c)$ operando a uma vazão q_j^c durante um determinado período.
- y_j assume valor 1 quando um compressor entra em operação, com taxas de vazão variando entre $[q_j^{c,min}, q_j^{c,max}]$. Caso contrário assume valor 0.
- p_i^w é a pressão e q_i^w é a vazão de *gas-lift* injetada no poço i .
- x_{ij} assume valor 1 caso o poço i seja atendido pelo compressor j , com l_{ij} representando a queda de pressão ao longo da tubulação que os conecta. Caso contrário assume o valor 0.
- $N = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de compressores disponíveis e $M = \{1, \dots, m\}$ é o conjunto de clientes (poços) a serem atendidos.
- $N_i \subseteq N$ é o subconjunto das facilidades que podem atender ao cliente i , enquanto $M_j \subseteq M$ é o subconjunto de clientes que podem ser atendidos pela facilidade j ; sendo que $j \in N_i$ se e somente se $i \in M_j$.

Na formulação acima a restrição (1b) garante que o cliente i pode ser atendido pela facilidade j se e somente se a facilidade estiver instalada. A restrição (1c) garante que exatamente uma facilidade irá atender cada cliente. A restrição (1d) garante que a pressão de saída da facilidade j , caso esta venha a atender o cliente i , é maior que a pressão demandada pelo cliente i acrescida da parcela referente à perda de carga. A restrição (1e) garante que se um compressor é instalado sua vazão mássica de saída deve estar entre os limites mínimo e máximo estabelecidos. A restrição (1f) garante que o total de *gas-lift* disponibilizado pela facilidade j deve ser superior a soma de todas as parcelas de vazão dos poços i atendidos por esta facilidade. As últimas restrições (1g) and (1h) expressam a natureza discreta das variáveis y_j and x_{ij} .

Suposição 1 As suposições abaixo dizem respeito à função de pressão p_j^c para cada $j \in N$:

- (i) $p_j^c(q_j^c)$ é côncava, duas vezes continuamente diferenciável no intervalo $q_j^c \in [0, q_j^{c,max}]$;
- (ii) p_j^c não aumenta conforme q_j^c varia de $q_j^{c,min}$ para $q_j^{c,max}$;
- (iii) $p_j^c(q_j^c) \geq 0$ para todo $q_j^c \in [0, q_j^{c,max}]$; e
- (iv) para qualquer $i \in M$, $i \in M_j$ somente se $q_i^w \leq q_j^{c,max}$ e $p_j^c(\max\{q_i^w, q_j^{c,min}\}) \geq p_i^w + l_{ij}$.

A suposição 1-(i) captura a forma típica da curva $p_j^c(q_j^c)$ que relaciona a pressão com a vazão. Essa suposição é necessária para o problema ser tratável, uma vez que assegura a convexidade do espaço de soluções factíveis. Na verdade, o espaço de soluções factíveis será convexo se p_j^c for côncava entre $[q_j^{c,min}, q_j^{c,max}]$, mas com essa suposição a relaxação contínua tem um espaço de soluções factíveis também convexo. A suposição 1-(ii) reflete a relação física entre a pressão e a taxa de vazão a um consumo fixo de energia, ou seja, a pressão decresce conforme a vazão aumenta. A suposição 1-(iii) não somente expressa o fato da pressão ser não-negativa, mas também assegura a verificação da restrição (1d) para $q_j^c = 0$ que ocorre quando uma facilidade está inativa. A suposição 1-(iv) faz com que os conjuntos M_j e N_i estejam consistentes com dos dados do problema. Essas suposições serão assumidas deste ponto em diante.

3 Instância Ilustrativa

Para um cenário experimental com $n = 5$ e $m = 6$, utilizando a equação polinomial logarítmica $p(q) = \alpha_0 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 \ln(1 + q)$ que representa as curvas de desempenho dos compressores apresentadas na Figura 2, podemos obter os valores para α dados na Tabela 1:

A equação provou ser um bom modelo, e os valores α são obtidos resolvendo um problema de mínimos quadrados, onde um conjunto de pontos conhecidos $\{(q_{j,1}^c, p_{j,1}^c), \dots, (q_{j,k}^c, p_{j,k}^c)\}$ descrevem a curva de pressão. Tal procedimento tipicamente induz a uma função decrescente p_j^c . A dificuldade está em garantir a concavidade, requerendo que a segunda derivada $2\alpha_{j,2} + 6\alpha_{j,3}q_j^c - \alpha_{j,4}/(1+q_j^c)^2$ seja negativa no intervalo $[0, q_j^{c,max}]$. Isso pode ser garantido resolvendo o problema de mínimos quadrados derivando as restrições

Figura 2: Curvas de desempenho dos compressores

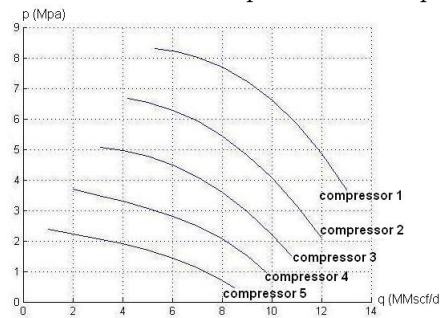


Tabela 1: Parâmetros α

Compressor (j)	$\alpha_{0,j}$	$\alpha_{1,j}$	$\alpha_{2,j}$	$\alpha_{3,j}$	$\alpha_{4,j}$
1	8,4836	0,3673	-0,0107	-0,0026	-0,7803
2	7,2308	0,6160	-0,0545	-0,0008	-1,2856
3	5,3931	0,4436	-0,0482	-0,0007	-0,8600
4	4,3853	-0,2262	0,0355	-0,0041	-0,3071
5	2,5887	-0,1050	0,0073	-0,0023	-0,1454

para vários pontos, ou trabalhando com condições suficientes baseadas nos valores de $\alpha_{j,2}$, $\alpha_{j,3}$ e $\alpha_{j,4}$, assim como $q_j^{c,max}$. Para o cenário em questão, as propriedades dos compressores estão descritas na Tabela 2 e as curvas de desempenho foram apresentadas na Figura 2. Os dados dos clientes são apresentados na Tabela 3. A Tabela 4 apresenta os custos de manutenção da rede e de perda de pressão ao longo dos dutos. Todos os valores da instância ilustrativa estão de acordo com as condições assumidas na Suposição (1).

Tabela 2: Características do grupo Compressores

Compressor (j)	Pressão	Pressão	Vazão	Vazão	Custo	Custo de
	Mín. ($p_j^{c,min}$) (MPa)	Máx. ($p_j^{c,max}$) (MPa)	Mín. ($q_j^{c,max}$) (MMscf/d)	Máx. ($q_j^{c,min}$) (MMscf/d)	Aquisição (c_j) (USD\$)	Operação (d_j) (USD\$)
1	4,1	8,3	5,3	13,0	8	3
2	2,9	6,7	4,2	12,0	6	5
3	2,1	5,1	3,1	10,8	10	1
4	1,2	3,7	2,0	9,8	4	7
5	0,6	2,4	1,0	8,5	6	4

4 Formulação Linear Por Partes

A principal dificuldade em resolver o PEC está em suas características de não-linearidade das restrições, da não-linearidade e não-convexidade da função objetivo, e da presença de variáveis contínuas e discretas. Até o momento não existem algoritmos de otimização global para tal problema.

Uma alternativa prática é a linearização por partes das curvas de pressão p_j^c de forma a transformar P em um problema de programação linear inteira-mista. Não somente a aproximação pode ser alcançada pela definição de um número de segmentos lineares, mas também o problema se torna apto a uma análise teórica e tratável por algoritmos de programação linear inteira-mista existentes.

O modelo linear por partes padrão que é mencionado nos livros textos (Modelo I) [5] é considerado fraco que uma formulação menos popular (Modelo II) [6]. Uma versão modificada do modelo padrão (chamado Modelo III) é proposto por Sherali [7] apresentando as mesmas vantagens do (Modelo II), cujos vértices do poliedro correspondente à relaxação linear são todos inteiros quando elimina-se algumas restrições, permitindo assim que o modelo seja resolvido com eficiência por algoritmos de programação linear.

Tabela 3: Demandas dos poços

Poços (i)	Pressão (p_i^w) (MPa)	Vazão (q_i^w) (MMscf/d)	N_i
1	5,0	3,0	{1,2}
2	5,0	4,0	{1,2}
3	4,0	2,0	{1,2,3}
4	3,0	4,0	{1,2,3,4}
5	1,5	5,0	{1,2,3,4,5}
6	1,0	2,0	{1,2,3,4,5}

Tabela 4: Dados da Rede

$i \setminus j$	l_{ij}/c_{ij}				
	1	2	3	4	5
1	0,1/8	0,4/7			
2	0,2/9	0,5/5			
3	0,2/6	0,2/4	0,05/6		
4	0,1/10	0,12/8	0,15/7	0,2/1	
5	0,1/6	0,1/4	0,2/3	0,1/1	0,1/1
6	0,1/7	0,1/3	0,132	0,1/1	0,1/1

4.1 Modelos Lineares por Partes

Em nosso estudo trabalharemos com três modelos de aproximação de p_j^c em funções lineares por partes através da programação linear inteira mista. Para os três modelos a definição abaixo é verificada.

Definição 1 $Q_j = \{(q_j^{c,0}, p_j^{c,0}), \dots, (q_j^{c,\kappa(j)}, p_j^{c,\kappa(j)})\}$ é o conjunto de $\kappa(j) + 1$ pontos de vazão/pressão do compressor j , onde:

- (i) $p_j^{c,k} = p_j^c(q_j^{c,k})$ para $k = 0, \dots, \kappa(j)$ de forma a ser consistente com a curva de pressão do compressor;
- (ii) $(q_j^{c,k}, p_j^{c,k})$ não é uma combinação convexa de $(q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})$ e $(q_j^{c,k+1}, p_j^{c,k+1})$ para todo $1 \leq k \leq \kappa(j) - 1$, desconsiderando pontos desnecessários;
- (iii) $q_j^{c,0} = q_j^{c,min}$ e $q_j^{c,\kappa(j)} = q_j^{c,max}$ para descartar limites de operação infactíveis;
- (iv) $q_j^{c,k-1} < q_j^{c,k}$, para todo $k \in K(j)$ implicando em pontos de vazão/pressão distintos, com $K(j) = \{1, \dots, \kappa(j)\}$.

4.1.1 Modelo Por Pesos nos Pontos (Modelo I)

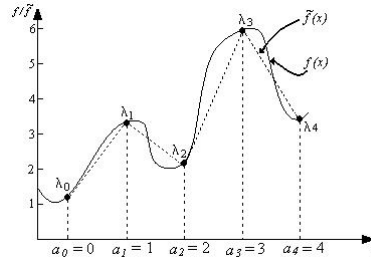
Seja $f(x)$ uma função contínua e seja $\{p_i = (a_i, f(a_i)) : i = 0, \dots, k\}$ um conjunto de pontos desta função. Neste modelo associa-se pesos a cada ponto p_i , utilizando para isso variáveis reais λ_i . A região de $f(x)$ é selecionada através de variáveis inteiras y_i . A formulação é a seguinte:

$$x = \sum_{i=0}^k a_i \lambda_i \quad (2a)$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^k f(a_i) \lambda_i \quad (2b)$$

Tendo como exemplo a Figura 3 com os valores dos pontos conforme indicado, deseja-se encontrar o valor $x = 2,7$. Observa-se que o ponto desejado está entre a_2 e a_3 . Portanto, $y_3 = 1$ irá selecionar apenas aquela região (r_3). As variáveis $\lambda_2 = 0,3$ e $\lambda_3 = 0,7$. Observa-se que o valor de λ_3 é maior que o de λ_2 , uma vez que x está mais próximo de a_3 devendo sua variável de peso ser mais expressiva.

Figura 3: Linearização por Partes para o (Modelo I)



4.1.2 Modelo Por Pesos Seqüenciais (Modelo II)

Para o segundo modelo por pesos, escrevemos x como:

$$x = a_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

onde $0 \leq \lambda_i \leq a_i - a_{i-1}, i = 1, \dots, k$.

Neste modelo o λ_i representa a região, e não mais um ponto, como no (Modelo I). Para tanto, desejamos representar um dado x que pertence a uma região r da função, para tanto λ_i assume:

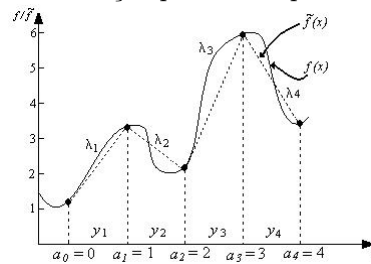
$$\lambda_i = \begin{cases} a_i - a_{i-1} & \text{se } i < r \\ x - a_i & \text{se } i = r \\ 0 & \text{se } i > r \end{cases}$$

Assim, chegamos a formulação:

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad (3a)$$

$$\tilde{f}(x) = f(a_0) + \sum_{i=1}^k \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \lambda_i \quad (3b)$$

Figura 4: Linearização por Partes para o (Modelo II)



Conforme a Figura 4, buscamos $x = 2,7$. Como $a_2 \leq x \leq a_3$, $r = 3$ e $(y_1, y_2, y_3) = (1, 1, 0)$. As variáveis reais $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = (1, 1, 0, 7, 0)$.

4.1.3 Modelo Sherali (Modelo III)

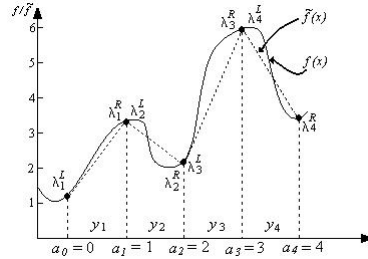
O terceiro modelo é proposto por Sherali [7], sendo considerado uma formulação mais geral, pois permite também linearizar funções descontínuas. O poliedro desta formulação é mínimo, ou seja, ele corresponde ao poliedro do fecho convexo das soluções, e todos seus vértices estão sobre pontos inteiros.

Nesta formulação utiliza-se duas variáveis que representam os pesos de cada região da linearização: λ_i^L é o peso do ponto à esquerda de uma região e λ_i^R é o peso do ponto à direita dessa região. Assim como nos outros modelos, a região é selecionada através de variáveis inteiras y_i . Sua formulação fica:

$$x = \sum_{i=1}^k [a_{i-1}\lambda_i^L + a_i\lambda_i^R] \quad (4a)$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^k [f(a_{i-1})\lambda_i^L + f(a_i)\lambda_i^R] \quad (4b)$$

Figura 5: Linearização por Partes para o (Modelo III)



Conforme a Figura 5 deseja-se encontrar o valor de $x = 2,7$, para isto deve-se selecionar a região r_3 de x , onde apenas y_3 assume valor 1, com $\lambda_3^L = 0,3$ e $\lambda_3^R = 0,7$.

4.2 Aplicações dos Modelos Lineares ao PEC

Para o (Modelo I) temos a seguinte formulação:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in N} c_j y_j + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} d_j \sum_{k=0}^{k(j)} f_j^{c,k} \lambda_j^k \quad (5a)$$

Subject to :

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i \in M, j \in N_i \quad (5b)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i \in M \quad (5c)$$

$$p_j^c \geq (p_i^w + l_{ij}) x_{ij}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (5d)$$

$$\sum_{i \in M_j} q_i^w x_{ij} \leq q_j^c, \quad j \in N \quad (5e)$$

$$q_j^c = \sum_{k=0}^{k(j)} \lambda_j^k q_j^{c,k}, \quad j \in N \quad (5f)$$

$$p_j^c = \sum_{k=0}^{k(j)} \lambda_j^k p_j^{c,k}, \quad j \in N \quad (5g)$$

$$\sum_{k=1}^{k(j)} z_j^k = y_j, \quad j \in N \quad (5h)$$

$$\sum_{k=0}^{k(j)} \lambda_j^k = y_j, \quad j \in N \quad (5i)$$

$$\lambda_j^0 \leq z_j^1, \quad j \in N \quad (5j)$$

$$\lambda_j^k \leq z_j^k + z_j^{k+1}, \quad j \in N, k = 1, \dots, k(j) - 1 \quad (5k)$$

$$\lambda_j^{k(j)} \leq z_j^{k(j)}, \quad j \in N \quad (5l)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \quad (5m)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (5n)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k \in K(j) \quad (5o)$$

onde:

- $f_j^{c,k} = q_j^{c,k} p_j^{c,k}$, define os pontos da função objetivo conforme a forma linear por partes da função $p_j^c(q_j^c)$;
- z_j^k assume o valor 1 se, e somente se, (q_j^c, p_j^c) é aproximada linearmente pelos pontos $(q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})$ e $(q_j^{c,k}, p_j^{c,k})$, onde $(q_j^c, p_j^c) = (q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})\lambda_j^{k-1} + (q_j^{c,k}, p_j^{c,k})\lambda_j^k$, $\lambda_j^{k-1} + \lambda_j^k = 1$ e $\lambda_j^{k-1}, \lambda_j^k \geq 0$.

A formulação do PEC no (Modelo II) fica:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in N} c_j y_j + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} d_j \left[f_j^{c,0} + \sum_{k=1}^{k(j)} \frac{f_j^{c,k} - f_j^{c,k-1}}{q_j^{c,k} - q_j^{c,k-1}} \lambda_j^k \right] \quad (6a)$$

Subject to :

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i \in M, j \in N_i \quad (6b)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i \in M \quad (6c)$$

$$p_j^c \geq (p_i^w + l_{ij}) x_{ij}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (6d)$$

$$\sum_{i \in M_j} q_i^w x_{ij} \leq q_j^c, \quad j \in N \quad (6e)$$

$$q_j^c = q_j^{c,0} + \sum_{k=1}^{k(j)} \lambda_j^k, \quad j \in N \quad (6f)$$

$$p_j^c = p_j^{c,0} + \sum_{k=1}^{k(j)} \frac{p_j^{c,k} - p_j^{c,k-1}}{q_j^{c,k} - q_j^{c,k-1}} \lambda_j^k, \quad j \in N \quad (6g)$$

$$\lambda_j^1 \leq q_j^{c,1} - q_j^{c,0}, \quad j \in N \quad (6h)$$

$$\lambda_j^k \leq (q_j^{c,k} - q_j^{c,k-1}) z_j^{k-1}, \quad j \in N, k = 2, \dots, k(j) \quad (6i)$$

$$\lambda_j^k \geq (q_j^{c,k} - q_j^{c,k-1}) z_j^k, \quad j \in N, k = 1, \dots, k(j) - 1 \quad (6j)$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad j \in N, k \in K(j) \quad (6k)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \quad (6l)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (6m)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k = 1, \dots, k(j) - 1 \quad (6n)$$

onde:

- z_j^k será 1 se, e somente se, (q_j^c, p_j^c) é aproximada através da combinação convexa dos pontos $(q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})$ e $(q_j^{c,k}, p_j^{c,k})$.

Para o último (Modelo III) a formulação em programação matemática fica:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in N} c_j y_j + \sum_{i \in M} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} d_j \sum_{k=1}^{k(j)} \left[f_j^{c,k-1} \lambda_j^{k,L} + f_j^{c,k} \lambda_j^{k,R} \right] \quad (7a)$$

Subject to :

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i \in M, j \in N_i \quad (7b)$$

Tabela 5: Instância com 5 compressores e 6 poços

Num. de pontos ($\kappa(j)$)	Custo Total (USD\$)	Num. nós B-&-B	Num. de Iterações	Tempo (h:m:s)
10	274.85	100	559	0:0:00.24
40	275.35	617	3000	0:0:00.73
80	275.37	1852	8317	0:0:03.78

Tabela 6: Instância com 10 compressores e 8 poços

Num. de pontos ($\kappa(j)$)	Custo Total (USD\$)	Num. nós B-&-B	Num. de Iterações	Tempo (h:m:s)
10	4.716,240.28	5098	31671	0:0:3.78
40	4.722,569.84	29713	125429	0:0:38.92
80	4.722,689.27	137181	439674	0:4:18.10

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i \in M \quad (7c)$$

$$p_j^c \geq (p_i^w + l_{ij})x_{ij}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (7d)$$

$$\sum_{i \in M_j} q_i^w x_{ij} \leq q_j^c, \quad j \in N \quad (7e)$$

$$q_j^c = \sum_{k=1}^{k(j)} \left[q_j^{c,k-1} \lambda_j^{k,L} + q_j^{c,k} \lambda_j^{k,R} \right], \quad j \in N \quad (7f)$$

$$p_j^c = \sum_{k=1}^{k(j)} \left[p_j^{c,k-1} \lambda_j^{k,L} + p_j^{c,k} \lambda_j^{k,R} \right], \quad j \in N \quad (7g)$$

$$\sum_{k=1}^{k(j)} z_j^k = y_j, \quad j \in N \quad (7h)$$

$$\lambda_j^{k,L} + \lambda_j^{k,R} = z_j^k, \quad j \in N, k = 1, \dots, k(j) \quad (7i)$$

$$\lambda_j^{k,L}, \lambda_j^{k,R} \geq 0, \quad (7j)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \quad (7k)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in M, j \in N_i \quad (7l)$$

$$z_j^k \in \{0, 1\}, \quad j \in N, k = 1, \dots, k(j) \quad (7m)$$

onde:

- z_j^k será 1 se, e somente se, (q_j^c, p_j^c) é aproximada linearmente pelos pontos $(q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})$ e $(q_j^{c,k}, p_j^{c,k})$, onde $(q_j^c, p_j^c) = (q_j^{c,k-1}, p_j^{c,k-1})\lambda_j^{k,L} + (q_j^{c,k}, p_j^{c,k})\lambda_j^{k,R}$, $\lambda_j^{k,L} + \lambda_j^{k,R} = 1$ e $\lambda_j^{k,L}, \lambda_j^{k,R} \geq 0$.

5 Resultados Comparativos

Além da instância ilustrativa foram desenvolvidas outras duas instâncias, uma com 10 compressores e 8 poços e outra com 15 compressores e 15 poços. Para cada um dos modelos foram realizadas linearizações com em 10 pontos, 40 pontos e 80 pontos, produzindo três linearizações para cada instância.

As formulações lineares por partes foram expressas em linguagem de modelagem para programação matemática e submetidas ao software ILOG CPLEX. Para as mesmas instâncias os três modelos apresentaram o mesmo resultado da função objetivo. Isto já era esperado, uma vez que os modelos são equivalentes, apenas apresentam formas distintas de representar um mesmo problema. Por ser mais intuitivo resolveu-se apresentar os resultados obtidos com a execução do (Modelo III), em termos de tempo de execução, número de iterações executadas pelo ILOG CPLEX e número de nós de *Branch-and-Bound*, além é claro do valor da função objetivo. Os resultados das 3 instâncias testadas estão apresentados nas Tabelas (5), (6) e (7).

Tabela 7: Instância com 15 compressores e 15 poços

Num. de pontos ($\kappa(j)$)	Custo Total (USD\$)	Num. nós B-&-B	Num. de Iterações	Tempo (h:m:s)
10	12.246,536.38	22055290	11147688	6:33:46.77
40	12.266,453.88	26706821	78210263	13:50:54.07
80	12.321,174.51	12611542	27398479	10:29:21.98

Do ponto de vista científico, é mais significativo explorar a estrutura da formulação para desenvolver algoritmos mais eficientes que possam lidar com instâncias maiores, uma vez que o ILOG CPLEX apresentou certa dificuldade em resolver as instâncias conforme estas iam crescendo de complexidade. A instância de 15 compressores e 15 poços exigiu bastante da memória do computador e uma instância maior poderia tornar-se inviável de ser solucionada. Uma alternativa é o estudo de desigualdades válidas para o poliedro correspondente ao fecho convexo das soluções factíveis tem sido utilizado com pelos procedimentos planos de cortes e de *branch-and-bound* utilizados na maioria dos softwares de programação matemática.

6 Sumário e Trabalhos Futuros

A proposta de linearização por partes é de suma importância para o tratamento do problema de escalonamento de compressores, permitindo o tratamento de problemas de grande porte e outras nuances do problema original.

Esse primeiro estudo é o ponto de partida para novas etapas a serem alcançadas, como a implementação de algoritmos de programação exata, especificamente os que trabalham com planos de corte em conjunto com a linearização por partes.

Referências

- [1] E. Camponogara. A structured facility location problem: Static and time-varying formulations with applications to compressor scheduling. *Working Paper*, 2006.
- [2] E. Camponogara, M. Castro, and A. Plucenio. The facility location problem: Model, algorithm, and application to compressor allocation. In *Proceedings of the IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, volume I, pages 247–252, Gramado, Brasil, 2006.
- [3] K. Dutta-Roy and K. K. Lo. A new approach to gas-lift allocation optimization. In *Proceedings of the SPE Western Regional Meeting*, Long Beach, USA, June 1997. Paper SPE 38333.
- [4] J.D. Huppler. Scheduling gas field production for maximum profit. In *Proceedings of the SPE-AIME 47th Annual Fall Meeting*, San Antonio, USA, October 1972. Paper SPE 4039.
- [5] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1988.
- [6] M. Padberg. Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs. In *Operations Research Letters*, volume 27, pages 1–5, 2000.
- [7] H. Sherali. On mixed-integer zero-one representations for separable lower-semicontinuous piecewise-linear functions. In *Operations Research Letters*, volume 28, pages 155–160, 2001.
- [8] S. Thumb, A. Carameros, J. Hibbs, and J. Mason. Natural gas pipeline and operations for power generation load. In *Proceedings of the 26th Annual Meeting of the Pipeline Simulation Interest Group*, San Diego, USA, October 1994. Paper PSIG 9403.
- [9] S. Wright, M. Somani, and C. Ditzel. Compressor station optimization. In *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the Pipeline Simulation Interest Group*, Denver, USA, October 1998. Paper PSIG 9805.