

EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO PARA UM TREM DE ONDAS SOBRE UM FUNDO VARIÁVEL.

¹A. M. S. Luz (IMPA), ²A. Nachbin (IMPA)

¹22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil; anamluz@impa.br

²22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil; nachbin@impa.br

Resumo: A exploração offshore tem sido responsável pelo crescimento da produção de petróleo no Brasil, fato que incentiva o estudo da dinâmica de ondas aquáticas sobre topografias variáveis. Através de um modelo que descreva esta dinâmica pode-se obter informações importantes sobre as regiões costeiras e questões como viabilidade de atividades de exploração nestas regiões.

Para obtenção de tal modelo, consideramos as equações de Euler para fluidos invíscidos e pretendemos obter uma equação de Schrödinger não-linear para um envelope de ondas moduladas lentamente. A partir de um modelo bidimensional para ondas de superfície em profundidade finita, utilizamos a técnica de análise assintótica em múltiplas escalas a nível das equações da teoria do potencial para obter um modelo reduzido. Tal modelo é dito reduzido no sentido que simplifica a teoria do potencial não-linear em duas dimensões espaciais para uma dimensão ao longo da fronteira livre.

No que diz respeito à geometria do problema, consideramos no fundo, a topografia do solo oceânico e/ou a presença de estruturas submarinas e uma fronteira livre na superfície do mar. Para modelagem de tal geometria usamos coordenadas curvilíneas. Através de uma aplicação conforme transformamos o nosso sistema de coordenadas em um de coordenadas curvilíneas que representam o domínio físico original mapeado em um domínio mais simples geometricamente (uma faixa).

Do ponto de vista matemático, e para simulações computacionais, o modelo a ser obtido é mais simples que o problema em sua formulação original.

Esta estratégia no processo de modelagem permite capturar e entender a dinâmica de ondas aquáticas numa determinada região onde já exista ou vá existir atividade de exploração offshore. Além disso, com este modelo pode-se obter previsões marítimas dessa região de forma mais rápida e mais eficiente computacionalmente.

Ondas aquáticas, Equação de Schrödinger, Envelope de Ondas, Profundidade finita.

1. INTRODUÇÃO

Para a exploração offshore são necessárias informações sobre a viabilidade e segurança das plataformas. Deste modo é importante um estudo da dinâmica de ondas de superfície sobre topografias variáveis.

A modelagem de ondas de superfície é de grande interesse para o estudo de dinâmica de oceanos e da teoria matemática de ondas lineares e não lineares. O nosso desafio é obter um modelo que capture como a topografia e/ou estruturas submersas podem influenciar a evolução de um trem de ondas na superfície em uma profundidade intermediária (Figura 1). Em Ruiz de Zárate Fábregas (2007) estudo semelhante foi feito para ondas internas utilizando uma abordagem um pouco diferente da que apresentaremos aqui.

Vamos deduzir um conjunto de equações que governa a evolução de um trem de ondas de superfície variando lentamente na presença de topografia usando mapeamento conforme. Mais especificamente usaremos a transformação de Schwarz-Christofel para mapear o domínio físico em uma faixa uniforme. Deste modo simplificamos a condição de impermeabilidade do fundo e transformamos o nosso problema no sistema coordenado (x, y) em um outro no formato com o qual já trabalhamos, só que agora em coordenadas curvilíneas

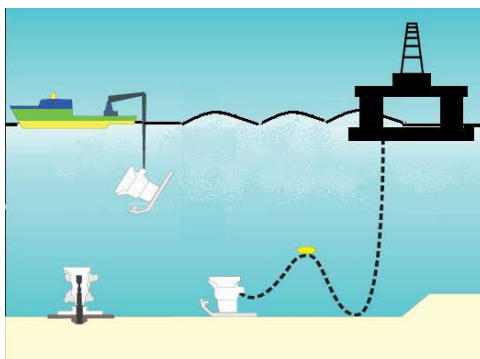


FIGURA 1. Representação esquemática da interação: estruturas submersas - trem de ondas - plataforma. Adaptação da Figura 6.30 de Thomas, 2001.

(ξ, ζ) . Usando expansões assintóticas e o método de múltiplas escalas obtemos uma equação de Schrödinger para o envelope do trem de ondas assim como no caso de fundo plano apresentado em Mei (1989) ou no caso do fundo com pequenas variações aleatórias (Mei e Hancock, 2003).

2. REVISÃO DA LITERATURA

Em nosso modelo, o uso de coordenadas curvilíneas acompanhando a topografia segue a abordagem de Nachbin (2003) e Hamilton (1977). Através desta abordagem obtemos um modelo que engloba topografias mais gerais do que Pihl *et al.* (2002), Mei e Hancock (2003). Estes autores usam análise assintótica para obtenção de uma equação de Schrödinger na modelagem de um envelope de ondas sobre topografia variável. No entanto limitam a variação no fundo ao caso de uma topografia descrita por uma função aleatória com média zero, sendo esta variação limitada por um parâmetro pequeno $\varepsilon \ll 1$. Estudamos inicialmente tal metodologia para obtenção de uma equação para o envelope de ondas sobre um fundo plano (Mei, 1989) e o nosso desafio foi conectar tal técnica com o uso do mapeamento conforme para lidar com a topografia e generalizando para situações onde temos além de topografia, também estruturas submersas, com perfis descontínuos ou até apresentando valores múltiplos em um ponto.

3. MODELO MATEMÁTICO

3.1 Formulação em Coordenadas Curvilíneas

Considere um escoamento invíscido, irrotacional no plano, onde y é coordenada vertical e x a horizontal. A região de interesse é delimitada inferiormente por um fundo impermeável e estacionário definido por uma função $y = -h(x)$, e na parte superior pela superfície livre dada por $y = \eta(x, t)$. O campo de velocidades u é definido através do potencial de velocidade $\Phi(x, y, t)$ na forma $u = (u, v) = \nabla\Phi$.

As equações para ondas aquáticas em termos da velocidade potencial $\Phi(x, y, t)$ e da elevação da superfície livre $\eta(x, t)$ são as conhecidas na literatura sobre o assunto (Mei, 1989 ou Whitham, 1974) e não serão repetidas aqui. A condição de Neumann no fundo, merece destaque, pois ela será transformada pela aplicação conforme, ela é descrita pela seguinte equação:

$$h_x \Phi_x + \Phi_y = 0, \quad y = -h(x) \quad (1)$$

Definiremos a aplicação conforme como em Hamilton (1977):

$$w(x + iy) = \xi + i\zeta \quad (2)$$

Esta leva o domínio do escoamento num estado não perturbado (domínio físico)

$$\Omega_z : -h(x) < y < 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3)$$

na faixa uniforme (domínio computacional)

$$\Omega_w : -1 < \zeta < 0, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (4)$$

com $x = x(\xi, \zeta)$ e $y = y(\xi, \zeta)$ um par de funções harmônicas em Ω_w .

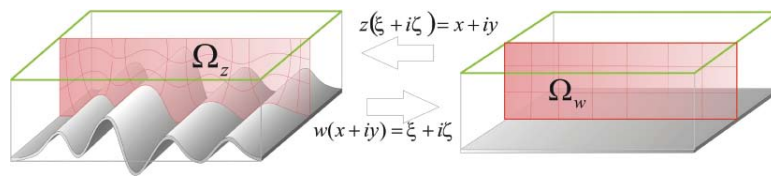


FIGURA 2. Representação esquemática da aplicação conforme (2) e de sua inversa

O conjunto de equações para ondas aquáticas escrito no sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, ζ) fica respectivamente da forma:

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0, \quad -1 < \zeta < N(\xi, t), \quad (5)$$

com as condições de fronteira (cinemática e dinâmica) para a superfície livre $\zeta = N(\xi, t)$:

$$|J|N_t + \Phi_{\xi} N_{\xi} - \Phi_{\zeta} = 0, \quad (6)$$

$$|J|(g\eta + \Phi_t) + \frac{1}{2}|\nabla_{\xi\zeta}\Phi|^2 = 0, \quad (7)$$

e a condição de Neumann no fundo

$$\Phi_{\zeta} = 0, \quad \zeta = -1. \quad (8)$$

Aqui $N(\xi, t)$ é a função que descreve o perfil da superfície livre no novo sistema de coordenadas e $|J| = |J|(\xi, \zeta)$ é o Jacobiano da transformação (2). Usando as condições de Cauchy-Riemann este pode ser escrito como:

$$|J|(\xi, \zeta) = y_{\xi}^2 + y_{\zeta}^2. \quad (9)$$

Ao ser avaliado na superfície livre o Jacobiano pode ainda ser escrito em função de um coeficiente variável $M(\xi)$, que expressa como as perturbações do fundo vêem-se refletidas na superfície:

$$|J|(\xi, t) = M(\xi)^2 + O(A). \quad (10)$$

Esta última expressão é obtida da expansão em polinômio de Taylor de (9) e denotando $M(\xi) \equiv y_{\zeta}(\xi, 0)$, onde $y(\xi, \zeta)$ é definido como solução de

$$\begin{aligned} y_{\xi\xi} + y_{\zeta\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) &\in \Omega_w \\ y &= 0, & \zeta &= 0 \\ y &= -h(x(\xi, -1)), & \zeta &= -1. \end{aligned} \quad (11)$$

Resolvendo o problema de valor de contorno acima obtemos que:

$$M(\xi) \equiv y_\zeta(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x(\xi', -1))}{\cosh \frac{\pi}{2}(\xi - \xi')} d\xi'. \quad (12)$$

Para que o leitor tenha uma idéia de como obtivemos as equações (5)-(8) e para mais detalhes sobre o mapeamento conforme, ver Hamilton (1977), Nachbin (2003) e Artiles Roqueta (2004). Estes dois últimos apresentam uma versão adimensional para as contas.

Vamos fazer expansões das equações (5)-(8) para obter uma família de problemas mais simples. Primeiramente expandimos a velocidade potencial, Φ , e a elevação da superfície livre, η , como

$$\Phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n, \quad (13)$$

onde $\varepsilon = kA \ll 1$, A é a amplitude característica da onda na superfície livre e k o número de onda. Considere que $\eta = O(A)$. Além disso vamos assumir que estamos em um regime de profundidade intermediária, isto é, $kH = O(1)$, onde H é a escala de profundidade. Note que $O(A/H) = O(kA/kH) = O(kA)$, ou seja, estamos considerando um regime de ondas abatidas (pequena variação da amplitude).

Em (13) temos que:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \phi_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots; \zeta; t, t_1, t_2, \dots), \\ \eta_n &= \eta_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots). \end{aligned}$$

Podemos adotar para $M(\xi)$ a seguinte expansão:

$$M(\xi) = 1 + \varepsilon m(\xi).$$

Deste modo teremos que:

$$\left(\frac{1}{M(\xi)} \right) = \left(\frac{1}{1 + \varepsilon m(\xi)} \right) = 1 - \varepsilon m(\xi) + \varepsilon^2 m(\xi)^2 - O(\varepsilon^3).$$

Assumiremos que a função $m(\xi)$ tem média (no sentido probabilístico) igual a zero.

Para permitir a modulação lenta nós introduziremos variáveis em múltiplas escalas:

$$\begin{aligned} \xi, \quad \xi_1 = \varepsilon \xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2 \xi \dots, \\ t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t \dots, \end{aligned}$$

as derivadas originais são substituídas também, conforme a equação (4.3), Capítulo 2 de Mei, 1989. Agrupamos os termos até ordem $O(\varepsilon^3)$. Então obtemos uma seqüência de problemas da forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi_n = F_n, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (14)$$

da equação de Laplace, e

$$\mathcal{L} \phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \phi_n = G_n, \quad \zeta = 0, \quad (15)$$

das condições na superfície livre (combinando a cinemática e a dinâmica). Usando a condição dinâmica de pressão constante, encontramos a elevação da superfície

$$-g \eta_n = H_n, \quad \zeta = 0. \quad (16)$$

E a condição de fundo, em potências de ε , pode ser escrita da forma:

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} = 0. \quad \zeta = -1. \quad (17)$$

Onde os termos forçantes são descritos por:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -2\phi_{1\xi\xi_1}, \quad F_3 = -\left[\phi_{1\xi_1\xi_1} + 2\phi_{1\xi\xi_2} + 2\phi_{2\xi\xi_1}\right]; \quad (18)$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = -\left[\eta_1 \mathcal{L}_\zeta \phi_1 + \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right)_t + 2\phi_{1t_1}\right] + gm(\xi)\phi_{1\zeta}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} G_3 = & -\left[\eta_2 \mathcal{L}_\zeta \phi_1 + \eta_1 \mathcal{L}_\zeta \phi_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 \mathcal{L}_\zeta \zeta \phi_1 + 2\left(\phi_{1\xi}\phi_{2\xi} + \phi_{1\zeta}\phi_{2\zeta}\right)_t + \right. \\ & + \eta_1 \left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right)_{t\zeta} + \frac{1}{2}\left(\phi_{1\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} + \phi_{1\zeta}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right) \\ & + 2\phi_{2t_1} + 2\phi_{1\zeta}\phi_{1\zeta t_1} + 2\phi_{1\xi_1}\phi_{1\xi t} + 2\phi_{1\xi}\phi_{1\xi t_1} + 2\phi_{1\xi}\phi_{1t\xi_1} + \\ & + 2\eta_1\phi_{1\zeta t_1} + 2\phi_{1t_2} + \phi_{1t_1 t_1}\left. \right] + \eta_1 gm(\xi)\phi_{1\zeta\zeta} + gm(\xi)\phi_{2\zeta} - \\ & - gm(\xi)^2\phi_{1\zeta} + 2m(\xi)\left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right)_t + m'(\xi)\phi_{1\xi}\phi_{1t} \end{aligned} \quad (20)$$

$$H_1 = \phi_{1t}, \quad H_2 = \phi_{2t} + \frac{1}{2}\left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right) + \phi_{1t_1} + \eta_1\phi_{1\zeta t}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_3 = & \phi_{3t} + \phi_{1\xi}\phi_{2\xi} + \phi_{1\zeta}\phi_{2\zeta} + \eta_1\phi_{2\zeta t} + \eta_2\phi_{1\zeta t} + \\ & + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\zeta\zeta t} + \frac{1}{2}\eta_1\left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right)_\zeta + \phi_{2t_1} \\ & + \phi_{1\xi}\phi_{1\xi_1} + \phi_{1t_2} + \eta_1\phi_{1\zeta t_1} - m(\xi)\left(\phi_{1\xi}^2 + \phi_{1\zeta}^2\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Seja $\langle \dots \rangle$ a média no sentido probabilístico e $(\dots)'$ a perturbação desta componente. Em todas as ordens, as soluções são expressas por:

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi_n', \quad \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta_n', \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F_n', \quad G_n = \langle G_n \rangle + G_n', \quad H_n = \langle H_n \rangle + H_n'$$

Usando a linearidade do problema e o fato de que $\langle m \rangle = 0$, as equações para $\langle \phi_n \rangle$ e $\langle \eta_n \rangle$, ($n = 1, 2$) reduzem-se ao caso bidimensional das equações apresentadas por Mei (1989) para fundo plano. De fato, a parte das soluções descrita por $\langle \dots \rangle$ obtida para $n = 1, 2$, assim como as condições de solvabilidade nestas ordens, ficam semelhantes as de Mei e Hancock (2003). Deste modo em primeira ordem temos como solução um trem de ondas monocromático propagando da esquerda para direita:

$$\langle \phi_1 \rangle = \phi_{10} + \frac{g \cosh Q}{2\omega \cosh q} (iAe^{i\psi} + *) \quad (23)$$

$$\langle \eta_1 \rangle = \frac{1}{2} (Ae^{i\psi} + *), \quad (24)$$

onde $\phi_{10} = \phi_{10}(\xi_1, \xi_2, t_{1,2}, \dots)$ representa o potencial de ondas longas, aqui $A = A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2, \dots)$ denota a amplitude do termo dominante, $\psi = k\xi - \omega t$ é fase da onda, $Q = k(\zeta + 1)$, $q = kh = k$ (com a aplicação conforme $h = 1$) e $*$ denota o complexo conjugado. A relação de dispersão

$$\omega^2 = gk \tanh q, \quad (25)$$

relaciona a frequência da onda ω e o número de onda k . Visto que $F_1 = G_1 = 0$, ϕ_1 não é afetado pelo efeito da topografia, deste modo:

$$\phi'_1 = \eta'_1 = 0; \quad \phi_1 = \langle \phi_1 \rangle, \quad \eta_1 = \langle \eta_1 \rangle.$$

Em segunda ordem para a média, obtivemos também a mesma solução:

$$\begin{aligned} \langle \phi_2 \rangle = & \phi_{20} - \frac{\omega}{2k^2 \sinh q} (Q \sinh Q) \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\psi} + * \right) - \frac{3}{16} \frac{\omega \cosh 2Q}{\sinh^4 q} (iA^2 e^{2i\psi} + *) . \\ \langle \eta_2 \rangle = & \left\{ -\frac{1}{g} \phi_{10r_1} - \frac{k}{2 \sinh 2q} |A|^2 \right\} + \frac{1}{2\omega} \left(i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\psi} + * \right) - \\ & - \frac{q \sinh q}{2k \cosh q} \left(i \frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\psi} + * \right) + \frac{k \cosh q (2 \cosh^2 q + 1)}{8 \sinh^3 q} (A^2 e^{2i\psi} + *) , \end{aligned}$$

Usando a condição de solvabilidade para o primeiro harmônico de $\langle \phi_2 \rangle$ também obtivemos:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0, \quad (26)$$

onde $C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ é a velocidade de grupo (ω definido em (25)). Este resultado é esperado, confirmando que em termos dominantes a amplitude de um trem de ondas viaja com velocidade de grupo $C_g(k)$.

Os resultados obtidos são novos para a componente $(\dots)'$ da solução de segunda ordem. A abordagem por aplicação conforme faz com que a topografia afete a condição de fronteira na superfície livre enquanto que no trabalho de Mei e Hancock (2003), ela afeta a condição de Neumann no fundo. O uso do mapeamento conforme também traz outras vantagens que serão destacadas a posteriori.

O problema em segunda ordem apresenta efeito da topografia presente no forçante $G'_2 = gm(\xi)\phi_{1\xi}$. Vamos resolver o problema para ϕ'_2 . Para tal devemos obter a solução do problema de valor de contorno para ϕ'_{21} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi'_{21} &= 0, \quad -1 < \zeta < 0, \\ \mathcal{L} \phi_n \equiv \left(g \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi'_{21} &= gm(\xi)\phi_{1\xi}, \quad \zeta = 0, \\ \frac{\partial \phi'_{21}}{\partial \zeta} &= 0, \quad \zeta = -1. \end{aligned}$$

Este problema é resolvido usando função de Green $\mathcal{G}(\xi, \zeta; \xi') = \mathcal{G}(|\xi - \xi'|, \zeta)$. A solução encontrada para ϕ'_{21} é:

$$\phi'_{21} = \frac{-iA\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi') e^{ik\xi'} \mathcal{G}(|\xi - \xi'|, \zeta) d\xi',$$

onde

$$\mathcal{G}(|\xi - \xi'|, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha \cosh \alpha \zeta + \sinh \alpha \sinh \alpha \zeta}{\alpha \sinh \alpha - \frac{\omega^2}{g} \cosh \alpha} e^{i\alpha(\xi - \xi')} d\alpha.$$

Segue que:

$$\phi'_2 = \phi'_{21} e^{-i\omega t} + *, \quad \zeta'_2 = \zeta'_{21} e^{-i\omega t} + *.$$

Em ordem $O(\varepsilon^3)$, o problema para $\langle \dots \rangle$, é afetado pela topografia devido a presença dos termos: $gm(\xi)^2 \phi_{1\xi}$ e $gm(\xi)\phi_{2\xi}$ em G_3 . Estes termos fazem com que $\langle G_3 \rangle$ fique na forma:

$$\begin{aligned}
 \langle G_3 \rangle = & \left[\zeta_2 \mathcal{L}_\zeta \phi_1 + \zeta_1 \mathcal{L}_\zeta \phi_2 + \frac{1}{2} \zeta_1^2 \mathcal{L}_{\zeta\zeta} \phi_1 + 2 \left(\phi_{1_\xi} \phi_{2_\xi} + \phi_{1_\zeta} \phi_{2_\zeta} \right)_t + \right. \\
 & + \zeta_1 \left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2 \right)_{t_\zeta} + \frac{1}{2} \left(\phi_{1_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \phi_{1_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\phi_{1_\xi}^2 + \phi_{1_\zeta}^2 \right) \\
 & + 2\phi_{2_{t_1}} + 2\phi_{1_\zeta} \phi_{1_{\zeta t_1}} + 2\phi_{1_{\xi_1}} \phi_{1_{\xi t}} + 2\phi_{1_\xi} \phi_{1_{\xi t_1}} + 2\phi_{1_\xi} \phi_{1_{t\xi_1}} + \\
 & \left. + 2\zeta_1 \phi_{1_{\zeta t_1}} + 2\phi_{1_{t_2}} + \phi_{1_{t_1 t_1}} \right] + \underbrace{iAg\beta e^{i\psi} - gm(\xi)^2 \frac{iA\omega}{2} e^{i\psi}}_{\text{efeito da topografia}}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{m(\xi)\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi') e^{-ik(\xi-\xi')} \mathcal{G}_\zeta(|\xi-\xi'|, \zeta) d(\xi-\xi'). \quad (28)$$

Por (27) a topografia afeta só o primeiro harmônico, deste modo $\langle \phi_{30} \rangle$ é governado por equações cuja a condição de solvabilidade é a mesma que para o fundo plano:

$$\frac{\partial^2 \phi_{10}}{\partial t_1^2} - g \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \phi_{10} = \frac{\omega^3 \cosh^2 q}{2k \sinh^2 q} (AA^*)_{\xi_1} - \frac{\omega^3}{4 \sinh^2 q} (AA^*)_{t_1}. \quad (29)$$

Esta equação descreve a evolução de uma onda longa gerada por ondas cuja a amplitude varia muito pouco dentro do envelope do trem de ondas.

Para o primeiro harmônico de $\langle \phi_3 \rangle$, o problema de valor de contorno é:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - k^2 \right) \phi_{31} = F_{31}, \quad -1 < \zeta < 0, \quad (30)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial \zeta} - \omega^2 \right) \phi_{31} = G_{31}, \quad \zeta = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \phi_{31}}{\partial z} = 0, \quad z = -1. \quad (32)$$

F_{31} é como no caso de fundo plano descrito em Mei (1989) e G_{31} tem dois termos a mais:

$$\begin{aligned}
 G_{31} = & \frac{1}{16 \sinh^5 q} \omega^3 k \cosh q (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q) i|A|^2 A - \\
 & - \frac{\omega k}{\sinh 2q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2 \omega \cosh^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) iA + \frac{\omega \cosh q}{2k \sinh q} i \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \\
 & - \frac{\omega^2 q}{k^2} i \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial t_1} + \frac{\omega^2 \cosh q}{k \sinh q} \frac{\partial A}{\partial t_2} + \underbrace{iA g \beta - gm(\xi)^2 \frac{iA\omega}{2}}_{\text{efeito da topografia}}.
 \end{aligned}$$

Usando a condição de solvabilidade (Teorema de Green):

$$\frac{1}{g} G_{31} = \int_{-1}^0 \left(F_{31} \frac{\cosh k(\zeta+1)}{\cosh k} \right) d\zeta, \quad (33)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial \xi_2} - \frac{i\omega q}{k^2 \sinh 2q} \cosh^2 q \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \\ & + \frac{1}{2\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} - \frac{ik^2 A}{2\omega \cosh^2 q} \left(\frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - \frac{2\omega \cosh^2 q}{k} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) - \frac{iq \sinh q}{k \cosh q} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1 \partial t_1} + \\ & + \frac{i\omega k^2 (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q)}{16 \sinh^4 q} |A|^2 A + iA\beta - m(\xi)^2 \frac{iA\omega}{2} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

O efeito da topografia no envelope de ondas está isolado nos dois últimos termos. Combinando (26) e (34) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) + i\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega k^2 (\cosh 4q + 8 - 2 \tanh^2 q)}{16 \sinh^4 q} |A|^2 A - \left(\frac{k^2 A}{2\omega \cosh^2 q} \frac{\partial \phi_{10}}{\partial t_1} - k \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} \right) A \right\} + i\varepsilon A \tilde{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

onde

$$\tilde{\beta} = \beta - m(\xi)^2 \frac{iA\omega}{2} = \frac{m(\xi)\omega}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} m(\xi') e^{-ik(\xi-\xi')} \mathcal{G}_\zeta(|\xi-\xi'|, \zeta) d(\xi-\xi') - m(\xi) \right],$$

e

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega q \cosh^2 q}{k^2 \sinh 2q} + \frac{q \sinh q}{k \cosh q} C_g > 0.$$

A equação (35) é uma equação de Schrödinger não linear (uma dimensão espacial - observe que começamos com duas). As equações (35) e (29) governam a evolução lenta do envelope A de ondas moduladas lentamente e do potencial de ondas longas ϕ_{10} . O resultado apresentado por Mei (1999) para fundo plano é simplesmente (35) com $\tilde{\beta} = 0$.

4. CONCLUSÃO

Nesse trabalho mostramos como o mapeamento conforme pode ser um grande aliado para se obter modelos mais gerais, no sentido que este pode nos possibilitar menos restrições quanto ao perfil do fundo. A principal vantagem do nosso modelo é que o coeficiente variável $M(\xi)$ (proveniente da aplicação conforme) nos possibilita representar topografias ou estruturas submersas com perfis descontínuos ou até apresentando valores múltiplos (conforme ilustrado nas Figuras 3 e 4, geradas usando o SC-Toolbox (Driscoll)) enquanto que o modelo apresentado por Mei e Hancock (2003) está restrito a perfis suaves com pequena variação em relação a profundidade média da lâmina d'água. O fato do nosso modelo se reduzir ao apresentado por Mei (1989) quando $\tilde{\beta} = 0$ nos dá confiabilidade nas equações obtidas. Obtivemos um modelo reduzido no sentido que simplifica a teoria do potencial não-linear de duas dimensões espaciais para uma dimensão ao longo da fronteira livre. Esperamos generalizar ainda mais este modelo e em particular implementar um método numérico compatível com o mesmo e com isso obter previsões marítimas numa dada região de forma mais rápida e mais eficiente computacionalmente. Deste modo pode-se obter informações sobre a viabilidade de atividades de exploração nesta região.

5. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao programa de bolsas de doutorado da ANP pelo financiamento deste trabalho, realizado no PRH-32.

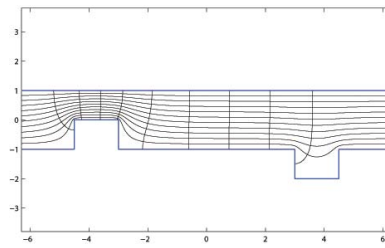


FIGURA 3. Representação esquemática de um fundo que apresenta variação descontínua nas coordenadas xy juntos com as curvas de nível em ξ e ζ .

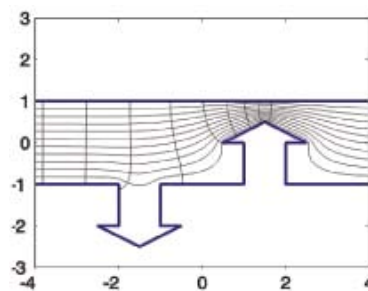


FIGURA 4. Domínio físico: fundo descrito por $h(x)$ que assume múltiplos valores em um ponto, por exemplo quando $h(x)$ representa o perfil de estruturas submersas.

6. REFERÊNCIAS

- ARTILES ROQUETA, W. **Modelagem de ondas não lineares através do operador Dirichlet-to-Neumann**. Ph.D. thesis, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- DRISCOLL, T. The Schwarz-Christoffel Toolbox for MATLAB. <http://www.math.udel.edu/~driscoll/software/SC>
- HAMILTON, J. Differential equations for long-period gravity waves on a fluid of rapidly varying depth. **J. Fluid Mech** **83**, 289, 1977.
- JOHNSON, R. S. **A modern introduction to the mathematical theory of water waves**. Cambridge University Press, 1997.
- MEI, C. C. **Applied dynamics of Ocean Surface Waves**. World Scientific, 1989.
- MEI C. C.; HANCOCK, M. J. Weakly nonlinear surface waves over a random seabed. **J. Fluid Mech** **475**, 247, 2003.
- NACHBIN, A. A terrain-following Boussinesq system. **SIAM J. Appl. Math** **63**, 905, 2003.
- NACHBIN, A.; RUIZ DE ZARATE, A. **Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada**. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2007.
- PIHL J. H.; MEI C. C.; HANCOCK, M. J. Surface gravity waves over a two-dimensional random seabed. **Physical review E** **66** (016611), 2002.
- RUIZ DE ZARATE FÁBREGAS, A. **A reduced model for internal waves interacting with submarine structures at intermediate depth**. Abril, 2007. 106p. Tese de Doutorado. Orientador: Nachbin, A. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. Rio de Janeiro: PETROBRÁS, 2001.
- WHITHAM, G. B. **Linear and Nonlinear Waves**. John Wiley, New York, 1982.

EVOLUTION EQUATIONS FOR A WAVES TRAIN OVER A VARYING OPOGRAPHY.

Abstract: Oil recovery in ocean waters has been responsible for increase of oil production in the Brazil. This stimulates research regarding the dynamics of water surface waves over varying topography because through an efficient model we can get important information in the coastal regions and questions like viability of exploration in these regions. To obtain such model, we consider the Euler equations for inviscid fluids and get a nonlinear Schrödinger equation of for the envelope of slowly modulated waves. From a bidimensional model for surface waves in finite depth, we use the technique of asymptotic simplification of the nonlinear potential theory equations and the method of multiple scales to get a reduced model. Such model is called reduced because it simplifies the theory of the nonlinear potential from two spatial dimensions to a one dimension at free boundary. About the geometry of the problem, we consider a varying topography at the bottom and/or the presence of submarine structures together with a free boundary at the surface of the sea. For the modeling of such geometry we use curvilinear coordinates. Through an conformal mapping we transform our cartesian system into one of curvilinear coordinates that maps the original physical domain into a simpler domain (a strip). From the mathematical point of view, and computational simulations, the deduced model is simpler than the problem in its original formularization. This strategy in the modeling process allows to capture and to understand the dynamics of water waves in regions where offshore exploration activity already exists or not. Moreover, with this model, computational maritime forecasts can be done faster and more efficient.

Water waves, Schrödinger equation, wave envelope, finite depth.

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste artigo.