

5º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

Propagação de Incertezas em Reservatórios de Petróleo usando o Método de Colocação Probabilística

AUTORES:

Júlio Hoffmann Mendes
Ramiro Brito Willmersdorf

INSTITUIÇÃO:

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Propagação de Incertezas em Reservatórios de Petróleo usando o Método de Colocação Probabilística

Abstract

In this work we present an implementation of an alternative to the Monte Carlo Method, that is adequate to problems where the number of uncertain variables is not so high, Probabilistic Collocation Method (PCM).

The PCM is a "Black Box" method, where uncertainty propagation analysis is made without any modification to the simulator code, that permits the use of commercial simulators with closed source. In PCM the expectation and the variance of the simulator's output are directly estimated, as functions of the probability distribution of the uncertain variables in simulator input. The mathematical tool behind the method is the gaussian quadrature integration, a quadrature whose interpolation points are roots of orthogonal polynomials according to an inner product, that depends on the probability distributions of input variable. For usual distributions like: normal, exponencial, uniform, etc, the polynomials that appears are well-knowned in linear algebra: Legendre, Laguerre and Hermite. The great advantage of PCM is that number of points necessary for a good estimation to the simulator output statistics compared to the Monte Carlo Method is be orders of magnitude smaller.

Applications of PCM on oil reservoir simulations will be presented. As it is just a preliminar implementation, we just treat problems with one uncertain variable, despite of the method being applicable to problems with multiple dimensions.

Introdução

Considere o problema de estimar a resposta de um simulador cujas entradas são incertas. Neste texto o simulador será entendido como uma função não linear que associa uma resposta a um conjunto de variáveis de entrada, algumas daquelas incertas. No contexto de reservatórios de petróleo a porosidade, a permeabilidade do meio, etc, serão as entradas típicas, a produção acumulada de óleo, a produção acumulada de gás serão possíveis respostas.

Metodologia

O cerne do método é avaliar numericamente integrais que representam expectâncias e variâncias de variáveis aleatórias. Essas integrais envolvem uma função densidade de probabilidade que para o método têm a importante propriedade de serem positivas e contínuas no intervalo de integração de interesse. A avaliação é feita de uma maneira inteligente, pensada por Gauss a muito tempo atrás.

Quadratura Gaussiana

Pretende-se calcular integrais da forma:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx$$

sendo $\omega(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$. Como qualquer outra quadratura, a aproximação será feita como segue: [1]

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_k A_k f(x_k)$$

onde $A_k = \int_a^b \omega(x) l_k(x) dx$ e l_k o polinômio de Lagrange no ponto x_k .

Esses pontos de interpolação são obtidos, definindo no espaço dos polinômios de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o produto interno $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_a^b \omega(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx$, com esse produto definido e a base canônica $\{1, x, x^2, \dots\}$, obtém-se através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma família de

polinômios ortogonais, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$. Cada polinômio ortogonal ϕ_n assim obtido possui “n” raízes distintas em $[a, b]$ e as raízes serão os pontos de interpolação procurados.

Colocação Probabilística

O método será aqui abordado para uma única entrada incerta. Seja X essa entrada. A relação entre a variável de interesse de saída do simulador, Y , e a entrada incerta, X , será expressa por uma função não linear desconhecida da forma $Y = S(X)$. O valor esperado da resposta e a variância serão dados respectivamente por:

$$E(Y) = \int_a^b S(x) f(x) dx \quad (1)$$

$$V(Y) = \int_a^b [S(x) - E(Y)]^2 f(x) dx \quad (2)$$

onde f é a função densidade de probabilidade da entrada.

A integral é avaliada numericamente através da quadratura gaussiana, o cálculo dos pontos e pesos da quadratura depende de f e é mostrado a seguir para algumas distribuições usuais:

Distribuição uniforme:

Se a entrada tem distribuição uniforme em $[a, b]$, $E(Y) = \int_a^b S(x) \frac{1}{b-a} dx$. A substituição

$u = \frac{2x-a-b}{b-a}$ leva à integral $E(Y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) du$. $\omega(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, da ortogonalização de Gram-Schmidt surgem os polinômios de Legendre.

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

Escolhida a ordem da quadratura (grau do polinômio), “n + 1”, o simulador será avaliado nos pontos: (quadratura de Gauss-Legendre)

$$E(Y) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n A_k S\left(\frac{b-a}{2}x_k + \frac{a+b}{2}\right)$$

Distribuição normal(μ, σ):

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

a substituição $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ leva à:

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} S(\sqrt{2}\sigma u + \mu) du$$

fazendo $\omega(x) = e^{-u^2}$, $a = -\infty$ e $b = \infty$ surgem os polinômios de Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$

a quadratura de Gauss-Hermite fornece:

$$E(Y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^n A_k S(\sqrt{2}\sigma x_k + \mu)$$

A distribuição normal é sem dúvida a mais utilizada em vários ramos da ciência, porém para alguns fenômenos físicos a variável aleatória não pode assumir valores negativos, a permeabilidade é um exemplo. Surge então a necessidade de uma distribuição que seja intuitiva como a distribuição normal mas que leve em consideração esse fato.

Distribuição log-normal(μ, σ):

$$E(Y) = \int_0^\infty S(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

a substituição $u = \frac{\ln(x) - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ leva à:

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} S(e^{\sqrt{2}\sigma u + \mu}) du$$

novamente a quadratura de Gauss-Hermite fornece:

$$E(Y) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^n A_k S(e^{\sqrt{2}\sigma x_k + \mu})$$

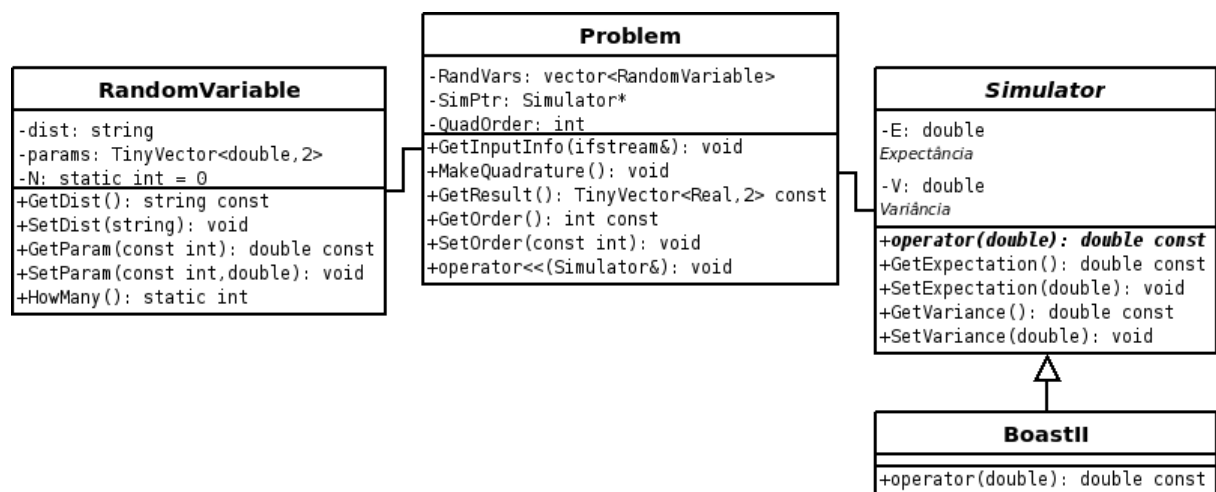
Para todos os casos o cálculo da variância, é feito através da equação (2), o valor $E(Y) = \bar{Y}$ é conhecido.

Simulador

O Boast II foi o simulador de reservatório utilizado. É um simulador numérico baseado em diferenças finitas, usando a formulação IMPES (implicit pressure/explicit saturation). Simula o escoamento trifásico (gás, óleo e água) em meios porosos regido pela lei de Darcy isotérmico em três dimensões. Foi empregado neste trabalho por ter distribuição livre e poder ser executado em qualquer computador sem restrições de licença.

Implementação Computacional

O Programa foi implementado em C++. A execução acontece da seguinte maneira: Um arquivo com todas as informações das variáveis de entrada incertas do simulador é lido, o programa dependendo da distribuição de cada entrada, computa os pesos e raízes associados a uma família de polinômios. O simulador é chamado através de um Shell Script, o qual altera o arquivo de entrada do simulador, roda o simulador e retorna a saída para o programa. Tudo foi feito de forma genérica, qualquer simulador pode ser facilmente acoplado ao problema.

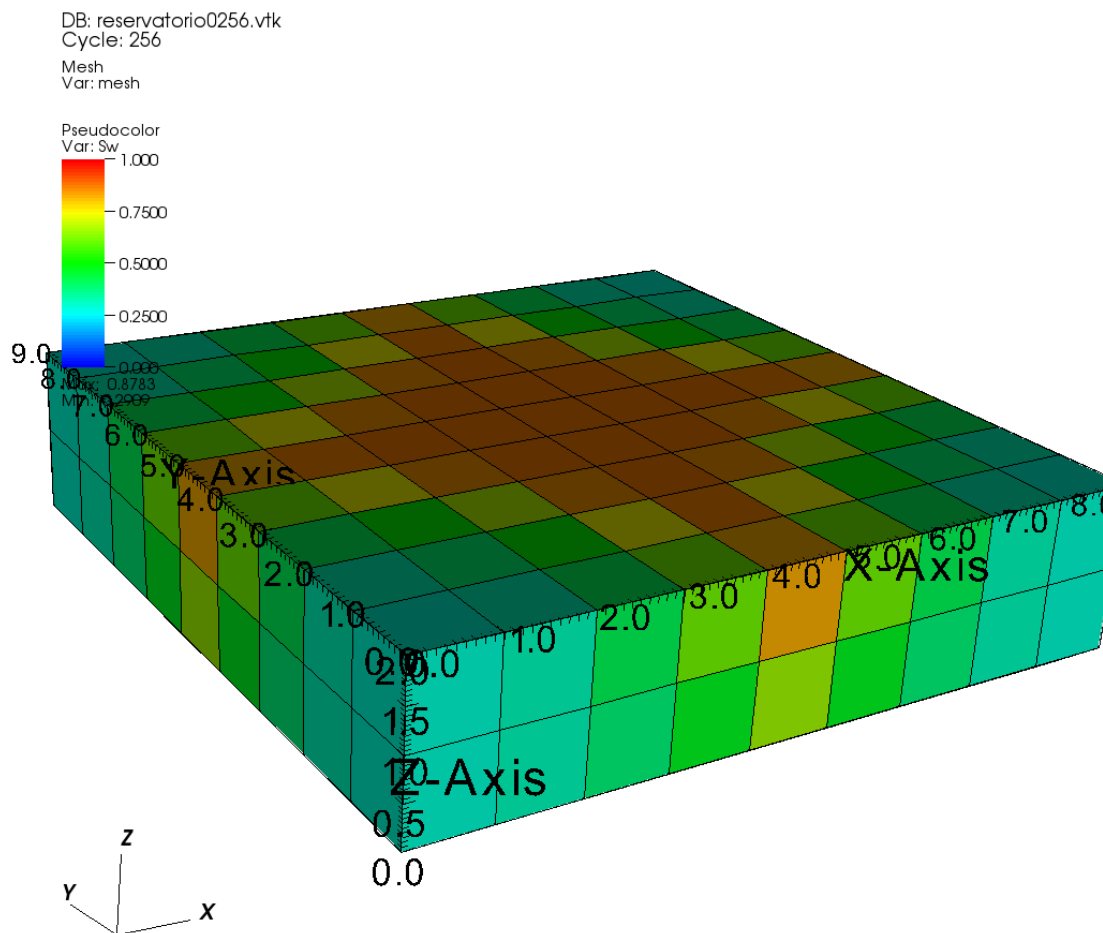


Resultados e Discussão

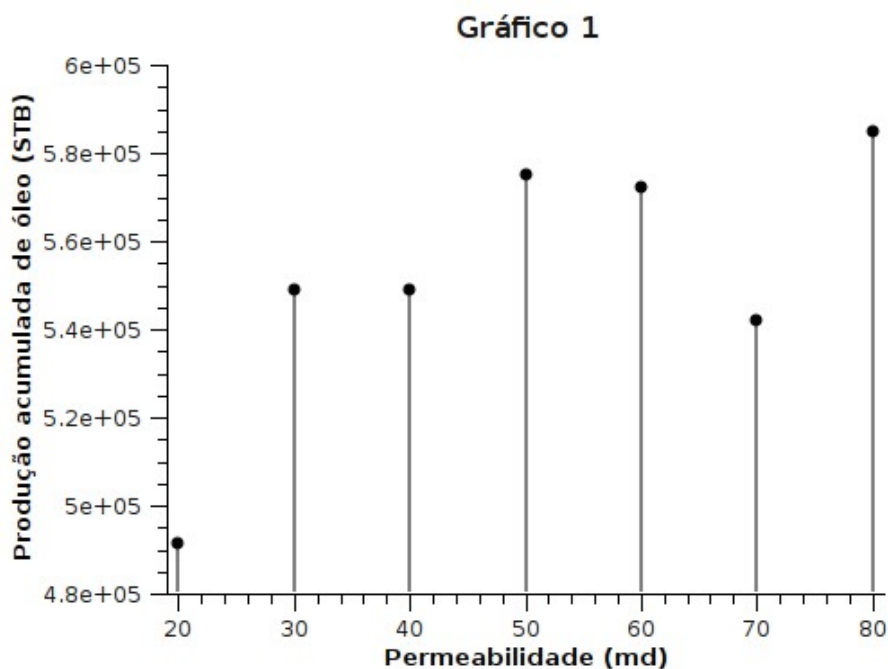
O exemplo avaliado foi o “five-spot waterflood of the mother lode sand”, o exemplo 4 que consta no manual do BoastII [3]. Um problema de five-spot em areia de filão. O reservatório foi modelado com duas camadas, cada camada é constituída de 9x9 blocos, totalizando 162 blocos. Cada bloco tem 160x160x20 pés cúbicos.

A porosidade foi definida por camadas, sendo 0.12 na camada inferior e 0.28 na superior. A permeabilidade na direção vertical foi 5.0md para todos os blocos do reservatório. Já nas direções horizontais a permeabilidade foi considerada isotrópica, um valor incerto. Como resposta do simulador, a produção de óleo acumulada foi a escolhida.

No início da exploração, o gradiente de pressão se encarrega de expulsar o óleo pelo único poço produtor que está no centro do reservatório, quando esse gradiente diminui, se inicia o processo de recuperação por injeção de água através de quatro poços injetores localizados nos cantos do reservatório. Formando assim o modelo Five-Spot. Abaixo a saturação de óleo um pouco depois da injeção de água.



user: julio
Mon Jun 15 20:40:49 2009



O gráfico 1 elucida a influência da incerteza da permeabilidade na produção de óleo. Admitindo que a distribuição da permeabilidade seja uniforme entre 20.0md e 80.0md, o valor esperado para produção acumulada de óleo é 550413 STB.

A simulação de reservatórios demanda tempo (horas e muitas vezes dias), isso reforça a busca por métodos que converjam com um número pequeno de pontos de avaliação, o MCP é um forte candidato.

Uma observação importante é que juntos a uma implementação “em paralelo”, esses métodos se tornam ainda mais poderosos. A utilização de Clusters para esse tipo de computação é intensa.

Outro ponto forte é o fato do método ter uma abordagem Black Box, não está vinculado a um simulador específico.

Conclusões

O método de colocação probabilística é uma maneira inteligente de se obter a esperança matemática e a variância de uma função de uma variável aleatória. No caso de simulação de reservatórios, um número pequeno de pontos amostrais é de extrema importância. O método se torna extremamente viável para problemas com poucas variáveis incertas de entrada, nesses casos o MCP é uma boa alternativa ao método de Monte Carlo.

Agradecimentos

Ao grupo de pesquisa PADMEC (Processamento de Alto Desempenho na Mecânica Computacional), ao PRH-26 da UFPE pela bolsa de estudos concedida através do programa de formação de recursos humanos (PRH) da ANP.

Referências Bibliográficas

- [1] STOER, J. & BULIRSCH, R. *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 2002
- [2] RAMAMURTHY, D. *Smart Simulation Techniques for the Evaluation of Parametric Uncertainties in Black Box System*, WASHINGTON STATE UNIVERSITY, 2005

- [3] **LORI G. STAPP** *FOSSIL ENERGY handbook for personal computer version of BOASTII: a three-dimensional, three phase black oil applied simulation tool*, U.S. Department of Energy, Bartlesville Oklahoma, 1989.
- [4] **RICARDO S. EHLERS** *Métodos Computacionalmente Intensivos em Estatística*, Departamento de Estatística Universidade Federal do Paraná, 2004.
- [5] **FOO J.; WAN X. & KARNIADAKIS G. E.** *The multi-element probabilistic collocation method (ME-PCM): Error Analysis and Applications*, Journal of Computational Physics, 2008.