

5º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável

AUTORES:

Ana Maria S. Luz¹, André Nachbin², .

INSTITUIÇÃO:

^{1,2}Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 5º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 5º PDPETRO, realizado pela a Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 15 a 22 de outubro de 2009, em Fortaleza-CE. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 5ºPDPETRO.

ESTABILIDADE DE UM TREM DE ONDAS SOBRE UM FUNDO MARINHO ALTAMENTE VARIÁVEL

Abstract

Our goal is to present a study that captures how the sea bottom topography can influence the stability of water wave trains (Stokes waves). Along these lines we get a nonlinear Schrödinger equation for the envelope for slowly modulated waves over a varying topography at intermediate depth. The Schrödinger equation presented information about the topography in more than one coefficient, including the nonlinear. This work includes more general topographies than Pihl et al. and Mei and Hancock, which required restrictions on small scale for smoothness and bathymetry. This modeling strategy allowed us to capture and understand the dynamics of water waves in regions where potential offshore exploration can take place. Through a stability study of solutions we can understand which regions are safer to offshore exploration activity. In other words, the study reveals regimes when the wave train becomes attenuated when it interacts with the topography.

To obtain such a model, we consider Euler equations for inviscid fluids and we perform the asymptotic simplification of the nonlinear potential theory equations together with the method of multiple scales to get a reduced model. Such a model is called reduced because it simplifies nonlinear potential theory from two spatial dimensions to one dimension along the free boundary. Regarding the geometry of the problem, we consider a varying topography at the bottom (and/or the presence of submarine structures) together with a free boundary at the surface of the sea. For the modeling of such geometry we use curvilinear coordinates. With this model, computational forecasts can be done faster and more efficient.

Introdução

Inovações tecnológicas têm refletido positivamente para o crescimento e desenvolvimento da exploração *offshore* no Brasil. Neste tipo de exploração são necessárias informações sobre a viabilidade e segurança das plataformas. Deste modo, é importante um estudo da dinâmica de ondas de superfície sobre topografias variáveis.

O nosso objetivo é apresentar um modelo que capture como a topografia do fundo marinho e/ou estruturas submersas podem influenciar a evolução de um trem de ondas na superfície do mar em uma região com profundidade intermediária (entenda-se aqui que o comprimento de onda é da mesma ordem da profundidade média por onde a onda propaga). Vamos deduzir um conjunto de equações que governam a evolução de um trem de ondas de superfície com a amplitude modulada lentamente. No fundo temos uma topografia que pode entre outras coisas, ter grande variação de amplitude, ser aleatória, não precisando ser contínua e podendo apresentar múltiplos valores. Assumiremos que as ondas na superfície livre são essencialmente senoidais e propagam em uma direção. Mais especificamente, obteremos um modelo reduzido (neste caso uma equação de Schrödinger) para a envoltória, do trem de ondas senoidais, utilizando expansões assintóticas em múltiplas escalas e mapeamento conforme. Discutiremos melhor esta abordagem, quando falarmos da metodologia.

A equação de Schrödinger obtida apresenta informações sobre a topografia em mais de um coeficiente, inclusive no que está agregado ao termo não linear. Isto não consta no trabalho de Mei e Hancock [8]. No modelo deles toda a informação da topografia está no coeficiente do termo linear de amortecimento que é adicionado à forma clássica da equação de Schrödinger não linear (SNL). Este diferencial no modelo obtido nos possibilitou fazer um estudo sobre a relação entre a estabilidade das ondas de Stokes (ondas não lineares), e efeitos da topografia. Mostraremos como a topografia afeta o ponto de focalização/defocalização (“*focusing/defocusing*”) para as ondas de Stokes. No caso do fundo plano é um resultado clássico sendo este ponto focalização/defocalização dado por $kh=1,363$ (ver Johnson [2]).

Do ponto de vista matemático, e para simulações computacionais, o modelo reduzido é mais simples que o problema em sua formulação original.

Metodologia

Os principais métodos utilizados para obter modelos reduzidos em EDP's, no estudo da dinâmica de ondas aquáticas sobre topografias variáveis, são técnicas de análise assintótica em múltiplas escalas aplicadas às equações da teoria do potencial não linear, na linha dos artigos [8] e [9] citados abaixo. A essência da análise assintótica é transformar o problema de evolução não linear em uma sequência de problemas de valor de contorno lineares.

Entre os métodos utilizados no processo de dedução do modelo reduzido destacamos o mapeamento conforme, mais especificamente, a aplicação de Schwarz-Christoffel. Tal aplicação será utilizada para lidar com a geometria do problema. No que diz respeito à geometria, consideramos no fundo a topografia do solo oceânico e/ou a presença de estruturas submarinas e uma fronteira livre na superfície do mar. Para a modelagem de tal geometria usamos coordenadas curvilíneas, na linha do artigo [6]. Através da aplicação conforme transformamos o nosso problema em coordenadas cartesianas em outro equivalente em coordenadas curvilíneas. Tal abordagem trouxe mudanças interessantes para o problema original: o problema de valor de contorno a derivadas parciais que antes tinha coeficientes constantes passou a ter coeficientes variáveis associados ao Jacobiano da transformação de coordenadas. Além disso o termo forçante na condição de fronteira de fundo mudou para a fronteira da superfície livre, deste modo simplificamos a condição de impermeabilidade do fundo. Por conta da aplicação conforme e das técnicas que usamos para lidar com os desafios listados acima (como a expansão do coeficiente variável, por exemplo), obtemos através da análise assintótica uma equação de Schrödinger apresentando informações sobre a topografia em mais de um coeficiente que conforme já mencionamos anteriormente nos permitiu estudar a relação da estabilidade das soluções com a topografia.

Resultados e Discussão

Modelo Matemático para Trens de Ondas

Consideraremos um escoamento bidimensional, invíscido, irrotacional regido de acordo com a teoria do potencial não linear. As equações para ondas aquáticas em termos do potencial de velocidades $\phi(x, y, t)$ e da elevação da superfície livre $\eta(x, t)$ são as mesmas apresentadas em Mei [7] ou Whitham [10]. O que faremos de novidade é mapear através de uma aplicação conforme a região de interesse (delimitada inferiormente por um fundo impermeável e estacionário dado pela função $y=h(x)$, e na parte superior pela superfície livre dada por $y=\eta(x, t)$) em uma faixa uniforme. Por hipótese, estamos considerando que $\eta = O(A)$, onde A é amplitude característica, k número de onda, com $kA \ll 1$ (regime de ondas abatidas) e que estamos em um regime de profundidade intermediária, isto é, $kH = O(1)$, onde H é a escala de profundidade.

Definiremos a aplicação conforme como em Hamilton [1]:

$$w(x + iy) = \xi + i\zeta. \quad (1)$$

Esta leva o domínio do escoamento num estado em repouso (domínio físico)

$$\Omega_z : -h(x) < y < 0, -\infty < x < \infty \quad (2)$$

na faixa uniforme (domínio computacional)

$$\Omega_w : -1 < \zeta < 0, -\infty < \xi < \infty, \quad (3)$$

com $x = x(\xi, \zeta)$ e $y = y(\xi, \zeta)$, um par de funções harmônicas em Ω_w .

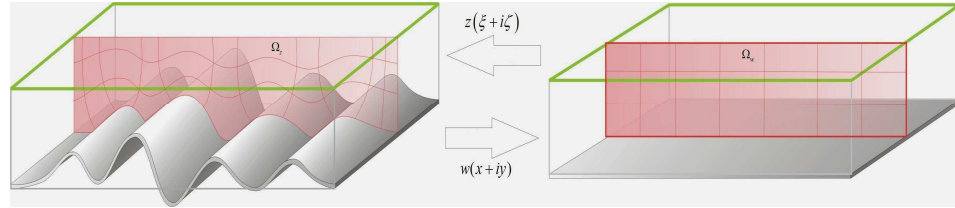


Figura 1. Representação esquemática da aplicação conforme (1) e de sua inversa.

O conjunto de equações para ondas aquáticas escritas no sistema de coordenadas curvilíneas (ξ, ζ) ficam respectivamente na forma

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\zeta\zeta} = 0, \quad -1 < \zeta < N(\xi, t), \quad (4)$$

com as condições de fronteira (cinemática e dinâmica) para a superfície livre $\zeta = N(\xi, t)$ dadas por

$$|J| N_t + \phi_\xi N_\xi - \phi_\zeta = 0, \quad (5)$$

$$|J| (g\eta + \phi_t) + \frac{1}{2} |\nabla_{\xi\zeta} \phi|^2 = 0, \quad (6)$$

$$\phi_\zeta = 0, \quad \zeta = -1. \quad (7)$$

Aqui $N(\xi, t)$ é a função que descreve o perfil da superfície livre no novo sistema de coordenadas e $|J| = |J|(\xi, \zeta)$ é o Jacobiano da transformação (1). Usando as condições de Cauchy-Riemann este pode ser escrito como:

$$|J|(\xi, \zeta) = y_\xi^2 + y_\zeta^2. \quad (8)$$

Ao ser avaliado na superfície livre o Jacobiano pode ainda ser aproximado pela função que representará o coeficiente variável $M(\xi)$ nas equações a seguir. Em outras palavras as perturbações do fundo vêm-se refletidas na superfície através de

$$|J|(\xi, t) = M(\xi)^2 + R_J(\xi, \zeta). \quad (9)$$

Esta última expressão é obtida da expansão em polinômio de Taylor da Equação (8) e denotando $M(\xi) \equiv y_\zeta(\xi, 0)$. Resolvendo um problema de valor de contorno para $y(\xi, \zeta)$ obtemos que:

$$M(\xi) \equiv y_\zeta(\xi, 0) = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x(\xi', -1))}{\cosh^2 \frac{\pi}{2}(\xi - \xi')} d\xi', \quad (10)$$

Como mencionamos anteriormente exigimos menos restrições da função que descreve a topografia do solo oceânico. Este fato vai servir de ponto de partida para a motivação da expansão do coeficiente $M(\xi)$.

Suponha que a função que descreve a topografia é da forma:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + n(x), & -L < x < L \\ 1, & x < -L \text{ ou } x > L \end{cases}, \quad (11)$$

onde L é a distância total de propagação da onda. A variação no solo marinho pode ter amplitude grande, n não precisa ter flutuações pequenas, nem ser contínua, nem de variação lenta.

Podemos adotar para $M(\xi)$ a seguinte expressão

$$M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi), \quad (12)$$

onde a representa a profundidade efetiva que vai ser “sentida” na superfície livre. De fato $a = 1 - \delta$, onde $\delta = -\langle m(\xi) \rangle$ com $0 < \delta < 1$, isto é, $a < 1$, $\langle m'(\xi) \rangle = 0$ e $\varepsilon = O(kA)$.

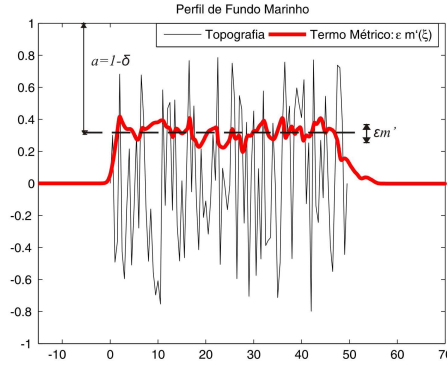


Figura 2: A onda na superfície livre vai “sentir” a topografia suavizada, como se fosse sem picos, e a profundidade efetiva representada pelo a na expressão do M .

Vamos fazer expansões das Equações (4)-(7) para obter uma família de problemas mais simples. Expandimos a potencial de velocidades, ϕ , e a elevação da superfície livre, η , como

$$\phi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \varepsilon^n \eta_n, \quad (13)$$

onde

$$\phi_n = \phi_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi; t, t_1, t_2, \dots),$$

$$\eta_n = \eta_n(\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, t, t_1, t_2, \dots).$$

Para permitir a modulação lenta nós introduziremos variáveis em múltiplas escalas:

$$\xi, \xi_1 = \varepsilon \xi, \xi_2 = \varepsilon^2 \xi \dots,$$

$$t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t \dots,$$

Substituindo nas equações e olhando até ordem 3 obtemos uma família de problemas do tipo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \phi_n = F_n, \quad -1 < \zeta < 0,$$

$$L\phi_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{g}{a} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \phi_n = G_n, \quad \zeta = 0,$$

$$-g\eta_n = H_n, \quad \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = -1, \quad (14)$$

Para os problemas de valor de contorno acima, a partir de $n=2$ os termos forçantes vão carregar a informação da topografia através de a e $m'(\xi)$. Nos problemas acima temos que

$$F_1 = 0, F_2 = -2\phi_{1_{\xi\xi}}, F_3 = -\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\phi_1 + 2\phi_{1_{\xi\xi_2}} + 2\phi_{2_{\xi\xi_1}}\right]; \quad (15)$$

$$G_1 = 0, G_2 = -\left[\eta_1 L_{\xi} \phi_1 + \frac{1}{a^2}(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2)_t + 2\phi_{1_{\eta_1}}\right] + \frac{gm'(\xi)}{a^2} \phi_{1_{\xi}}, \quad (16)$$

$$G_3 = -\left[\eta_2 L_{\xi} \phi_1 + \eta_1 L_{\xi} \phi_2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 L_{\xi\xi} \phi_1 + \frac{2}{a^2}(\phi_{1_{\xi}} \phi_{2_{\xi}} + \phi_{1_{\xi}} \phi_{2_{\xi}})_t + \eta_1(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2)_{t_{\xi}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a^4}\left(\phi_{1_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \phi_{1_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2) + 2\phi_{2_{\eta_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi}} \phi_{1_{\xi_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi_1}} \phi_{1_{\xi_1}} + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi}} \phi_{1_{\xi_1}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{a^2}\phi_{1_{\xi}} \phi_{1_{\xi_1}} + 2\eta_1 \phi_{1_{\xi_1}} + 2\phi_{1_{\eta_1}} + \phi_{1_{\eta_1}}\right] + \eta_1 g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{1_{\xi\xi}} + g \frac{m'(\xi)}{a^2} \phi_{2_{\xi}} - \\ - \frac{m'(\xi)^2}{a^3} \phi_{1_{\xi}} + 2 \frac{m'(\xi)}{a^3}(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2)_t + \frac{m_{\xi}'(\xi)}{a^3} \phi_{1_{\xi}} \phi_{1_{\eta}}. \quad (17)$$

$$H_1 = \phi_{1_t}, H_2 = \phi_{2_t} + \frac{1}{2a^2}(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2) + \phi_{1_{\eta}} + \eta_1 \phi_{1_{\xi_t}}, \quad (18)$$

$$H_3 = \phi_{3_t} + \phi_{1_{\xi}} \phi_{2_{\xi}} + \phi_{1_{\xi}} \phi_{2_{\xi}} + \eta_1 \phi_{2_{\xi_t}} + \eta_2 \phi_{1_{\xi_t}} + \frac{1}{2}\eta_1^2 \phi_{1_{\xi_t}} + \frac{1}{2a^2} \eta_1 (\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2)_{\xi} + \phi_{2_{\eta_1}} + \phi_{1_{\xi}} \phi_{1_{\xi_1}} + \phi_{1_{\eta_2}} + \eta_1 \phi_{1_{\xi_1}} - \frac{m'(\xi)}{a^3}(\phi_{1_{\xi}}^2 + \phi_{1_{\xi}}^2) \quad (19)$$

Seja $\langle \dots \rangle$ a média no sentido probabilístico e $(\dots)'$ a perturbação desta componente. Usando a linearidade dos subproblemas, temos que

$$\phi_n = \langle \phi_n \rangle + \phi', \eta_n = \langle \eta_n \rangle + \eta_n', n = 1, 2, 3, \dots$$

Os forçantes também podem ser escritos desta forma:

$$F_n = \langle F_n \rangle + F', G_n = \langle G_n \rangle + G', H_n = \langle H_n \rangle + H'$$

Se em todas as ordens procurarmos soluções (tanto para a parte determinística, quanto para a aleatória), como séries envolvendo modos de Fourier da forma

$$\{\phi_n, F_n, G_n\} = \sum_{m=-n}^n e^{im\psi} \{\phi_{nm}, F_{nm}, G_{nm}\}, \psi = kx - \omega t. \quad (20)$$

Obteremos a seguinte família de subproblemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2 k^2 \right) \phi_{nm} = F_{nm}, -h < y < 0 \\ \left(g \frac{\partial}{\partial y} - m^2 \omega^2 \right) \phi_{nm} = G_{nm}, y = 0 \\ \frac{\partial \phi_{nm}}{\partial y} = 0, y = -h \end{array} \right. \quad (21)$$

A equação de Schrödinger surge a partir da condição de compatibilidade dos problemas de valor de contorno em terceira ordem para parte determinística. Depois de muitas contas obtemos o seguinte modelo matemático para um trem de ondas de modulação lenta sobre uma topografia variável:

$$-i \frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B - i\Theta B = 0, \quad (22)$$

onde $\Theta = \frac{\beta_{ai}}{\omega} \left(\frac{\sigma_o}{A_o} \right)^2$, sendo σ_o o desvio padrão da perturbação no coeficiente da superfície livre

($M(\xi) = a + \varepsilon m'(\xi)$), A_o uma amplitude característica e α_1 e α_2 dados por

$$\alpha_1 = -\frac{k^2 \partial^2 \omega}{2\omega \partial k^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 q} \{ (6a^2 + 2) \cosh^4 q + (37 - 45a^2) \cosh^2 q + 1 + (36a^2 - 28) -$$

$$- 2 \tanh^2 q \} - \frac{\left(a \widetilde{C}_g / c_p + 2 \cosh^2 q \right)^2}{2 a \sinh^2 2q \left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C}_g^2}{c_p} \right)} - \frac{\left(a \widetilde{C}_g / c_p + 2 \cosh^2 q \right) (\Upsilon)}{2 a^2 \sinh^2 2q \left(\frac{q}{\tanh q} - \frac{\widetilde{C}_g^2}{c_p} \right)}.$$

Note que a informação da topografia está nos coeficientes: α_1 e α_2 , que dependem de a (profundidade efetiva, ou seja, dependem de $\langle m(\xi) \rangle$). Υ na expressão acima é uma constante que também depende de a , e Θ que depende da correlação de m .

Vamos analisar como podemos relacionar estabilidade com topografia. Como Mei e Hancock [8] já fizeram a análise da estabilidade usando o parâmetro Θ , vamos fazer uma análise nos detendo à novidade do nosso modelo: os coeficientes α_1 e α_2 . Estes apresentam informação da batimetria através da profundidade efetiva “ a ”. Deste modo vamos reescrever a equação (22) na forma:

$$-i \frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \alpha_2 |B|^2 B = 0. \quad (23)$$

Considere uma solução da forma de uma onda de Stokes com perturbação

$$B = B_o (1 + \Delta b) e^{i(\Omega \tau + \Delta \theta)}, \quad (24)$$

onde b e θ são funções reais e cuja relação de dispersão é dada por $\Omega = \alpha_2 |B_o|^2$. Substituindo (24) em (23), obtemos um sistema de equações lineares com coeficientes constantes que apresenta uma solução da forma:

$$\begin{pmatrix} b \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_o \\ \theta_o \end{pmatrix} e^{i(\kappa \chi - \mu \tau)} + c.c., \quad (25)$$

onde b_o , θ_o , κ (>0) e μ são constantes. Esta solução existe desde que

$$\begin{vmatrix} i\mu & -\kappa^2 \alpha_1 \\ -\alpha_1 \kappa^2 + 2|B_o|^2 \alpha_2 & -i\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = (\alpha_1 \kappa)^2 (\kappa^2 - 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} |B_o|^2).$$

Fica evidente que o critério de estabilidade, depende do sinal de α_1/α_2 , uma vez que ele vai controlar o crescimento ou decaimento das perturbações em (24). Temos o seguinte critério de estabilidade:

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 0$	(μ é real) estável	“defocusing”
$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$	(μ é imaginário) instável	“focusing” (SNL+)

Tabela 1: Critério de Estabilidade

As expressões de α_1 e α_2 são funções do número de onda k , uma vez que estamos supondo $h=1$. Portanto o comportamento de α_1 e α_2 pode ser examinado em função de k para diferentes valores de a .

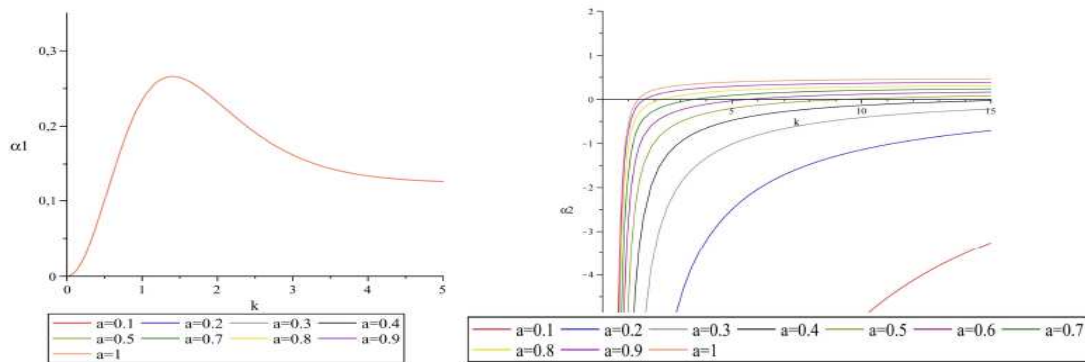


Figura 3: (a) Gráfico de α_1 versus k

(b) Gráfico de α_2 versus k

Temos que o coeficiente α_1 é positivo para todo $k>0$, e independe de a . Porém, dado um valor de a fixo, α_2 muda de sinal para um determinado valor de k . A tabela a seguir mostra os valores aproximados deste valor crítico (k_0) onde o coeficiente α_2 muda de sinal.

a	$k_0 \approx$
1	1.363
0.9	1.609
0.8	2.272
0.7	3.528
0.6	5.592
0.5	9.393
0.4	17.142
0.3	35.245
0.2	89.536
0.1	388.6

Tabela 2: Valores de k onde α_2 muda de sinal

O coeficiente α_2 contém a informação estatística da topografia através do parâmetro a (lembramos que a está relacionado com o valor de $\langle m(\xi) \rangle$). À medida que o valor de a diminui, o valor crítico k_0 (onde α_2 muda de sinal) aumenta, isto é, a região onde as soluções podem apresentar instabilidade, é deslocada para direita, aumentando assim a região de estabilidade onde $\alpha_1/\alpha_2 < 0$. Podemos então concluir que diminuindo o valor do parâmetro a , ou seja aumentando a amplitude das flutuações da topografia, regularizamos a solução: números de onda que eram instáveis passam a ser estáveis. Em outras palavras, conforme a topografia flutua mais, a equação passa a ser “defocusing” em regiões onde antes era “focusing”¹.

Conclusões

Destacamos que através deste modelo pode-ser obter informações de como a topografia do fundo marinho e/ou estruturas submersas podem influenciar a evolução de um trem de ondas na superfície do mar

¹ Informalmente dizemos que uma equação é “defocusing” se a não linearidade tende a agir de forma a dissipar a solução quando esta está concentrada em uma certa área e assim reforçar os efeitos da dispersão

de uma região com profundidade intermediária. Por exemplo, quanto ao grau de atenuação/ estabilização das ondas.

A principal vantagem deste modelo é que o coeficiente variável $M(\xi)$ (proveniente da aplicação conforme) nos possibilita representar topografias ou estruturas submersas com perfis que podem apresentar múltiplos valores, podem ser descontínuos, ser aleatórios e podem ter grande variação de amplitude entre outras propriedades. Isto contrasta com o modelo apresentado por Mei e Hancock [8] que está restrito a perfis suaves com pequena variação em relação a profundidade média da lâmina d'água.

A equação de Schrödinger que obtivemos (22) apresenta informações sobre a topografia em mais de um coeficiente, inclusive no que está agregado ao termo não linear, α_2 . Este parâmetro contém informações estatísticas da topografia (uma vez que $a = 1 + \langle m(\xi) \rangle$). Tal fato possibilitou fazer um estudo sobre a relação entre o efeito de estabilidade e a profundidade efetiva a . Variando o valor do parâmetro a descobrimos novas regiões onde uma SNL pode mudar de “focusing” para “defocusing”.

Agradecimentos

À ANP pelo suporte financeiro durante o doutorado. Em especial à ANP/PRH- 32 onde foi desenvolvida esta pesquisa

Referências Bibliográficas

1. HAMILTON, J. Differential equations for long-period gravity waves on a fluid of rapidly varying depth. *J. Fluid Mech*, 83:289-10, 1977.
2. JOHNSON, R. S. *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*. Cambridge University Press, 1997.
3. LUZ, A. M. S. Estabilidade de um trem de ondas sobre um fundo marinho altamente variável. Orientador: Nachbin, A. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.
4. LUZ, A. M. S., NACHBIN, A. Modelagem de trem de ondas em regiões costeiras, 2008. (Congresso Rio Oil & Gas, Apresentação de Trabalho)
5. LUZ, A. M. S., NACHBIN, A. Equações de evolução para um trem de ondas sobre um fundo, 2007. (Congresso 4º PDPETRO ,Apresentação de Trabalho)
6. NACHBIN, A. A terrain-following Boussinesq system, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. **63**, No. 3, p. 905-922, 2003
7. MEI, C. C. *Applied dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, 1989.
8. MEI C. C. & HANCOCK, M. J. Weakly nonlinear surface waves over a random seabed, *J. Fluid Mech.*, vol. **475**, pp. 247-268, 2003
9. PIHL J. H.; MEI C. C.; Hancock, M. J. Surface gravity waves over a two-dimensional random seabed, *Physical review E* 66, 016611, 2002
10. WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley, New York, 1982.