

5º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

SOLUÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA A RECUPERAÇÃO DE ÓLEO PELA INJEÇÃO DE MISTURAS DO TIPO ÁGUA-GÁS

AUTORES:

Maria Joseane Felipe Guedes

Aparecido Jesuino de Souza

INSTITUIÇÃO:

Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA/RN
joseane@ufersa.edu.br

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG/PB
cido@dme.ufcg.edu.br

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 5º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 5º PDPETRO, realizado pela a Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 15 a 22 de outubro de 2009, em Fortaleza-CE. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 5ºPDPETRO.

SOLUÇÃO DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA A RECUPERAÇÃO DE ÓLEO PELA INJEÇÃO DE MISTURAS DO TIPO ÁGUA-GÁS

Abstract

In this work we obtain the solution of a system of conservation laws modeling one-dimensional horizontal three-phase flow in a porous medium initially filled with a mixture of water and oil, which is displaced by the injection of a mixture of water and gas. We determine the sequence of waves that describe the analytical solutions of the system of partial differential equations subjected to initial data representing a generic water-oil mixture close to a situation of a virgin reservoir. For this fixed initial condition we describe the sequence of waves for all possibilities for the proportions of water and gas in the injected mixture. We show that there is a set of special injection data separating distinct structures of waves in the sequence that describes the solutions. We find that in general the solutions consist of a faster wave, consisting of a single shock or a shock adjacent to a rarefaction wave, separated by a constant state from a slower wave, which consists of a shock adjacent to a rarefaction wave reaching the injection state. Among the special injection data one is critical in the sense that it represents the optimal injection strategy for the oil recovery.

Introdução

Neste trabalho estamos interessados na determinação das sequências de ondas que descrevem a evolução de um escoamento unidimensional horizontal, em um meio poroso, consistindo de três fases móveis imiscíveis (óleo, água e gás), pela injeção de gás e água num reservatório petrolífero contendo inicialmente água e óleo.

A modelagem matemática para o escoamento é feita baseando-se nas leis de conservação de massa de cada uma das fases e na lei de força de Darcy, também para cada fase, que substitui a equação de momentum, (CHAVENT & JAFFRÉ, 1986). Baseados nestas leis físicas, e após várias simplificações, chegamos a um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares do tipo hiperbólico de leis de conservação em que as variáveis independentes são a posição “ x ” e o tempo “ t ”, e as variáveis dependentes são as saturações de duas das fases, haja vista que a terceira delas é obtida como o percentual complementar às outras duas.

Para a simulação da recuperação de reservatórios petrolíferos as condições iniciais são tomadas constantes por partes com uma descontinuidade do tipo salto em cada saturação, conhecido na literatura matemática como problema de Riemann (SMOLLER, 1994). Estas constantes representam então os dados de injeção e os de produção de um reservatório. A evolução da resolução do problema de Riemann para o modelo de Corey com permeabilidades quadráticas tem seguido essencialmente pelos seguintes passos, longe ainda do problema físico. Nesta direção um primeiro passo foi dado em (ISAACSON, et. al., 1992), considerando as viscosidades das três fases constantes e iguais em que há uma simetria tripla no triângulo das saturações. Para este caso a solução foi determinada completamente e a sequência de ondas (bancos de óleo, água ou gás) que compõem o escoamento foram perfeitamente descritos. Em seguida um segundo passo foi dado em (SOUZA, 1992), considerando-se a viscosidade da fase água ligeiramente diferente das outras duas e então houve a quebra de uma simetria, restando ainda uma dupla simetria. Neste trabalho pretendemos dar mais uma contribuição neste sentido considerando a viscosidade do gás inferior às outras duas, e com os dados de injeção e de produção do tipo uma mistura gás-água e óleo-água, respectivamente. Com isto também quebramos uma das simetrias, mas com relação à outro eixo do triângulo de saturações do considerado em (SOUZA, 1992) tendo uma previsão do tipo de dificuldade que ocorrerá para o caso das três viscosidades distintas e mais compatível com uma situação real.

Feitas as considerações acima e seguindo a dedução detalhada feita em (GUEDES, 2009), temos então que resolver o problema de Riemann a seguir para o sistema de leis de conservação que modela o escoamento:

$$\begin{cases} \frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s_o}{\partial t} + \frac{\partial f_o}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial f_g}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad U(x, t=0) = \begin{cases} U_- := I & \text{se } x < 0, \\ U_+ := P & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que a letra U representa a trinca de saturações s_w , s_o e s_g , I as saturações da mistura gás-água no poço injetor e P as saturações da mistura água-óleo no poço produtor. As saturações s_w , s_o e s_g assumem valores no espaço de estados, chamado de triângulo de saturações, dado por:

$$\Delta = \{(s_w + s_o + s_g); 0 \leq s_w \leq 1, 0 \leq s_o \leq 1, 0 \leq s_g \leq 1, s_w + s_o + s_g = 1\}.$$

o qual está representado nas Figura 1-(a) e 1-(b) em coordenadas baricêntricas, em que o vértice G indica que $s_g = 1$ (apenas gás presente), o vértice W que $s_w = 1$ (apenas água presente) e o vértice O que $s_o = 1$ (apenas óleo presente), enquanto os lados $[G, W]$, $[W, O]$ e $[G, O]$ indicam a ausência de óleo, de gás e de água, respectivamente. Assim, os dados de produção P correspondem a pontos no lado $[W, O]$ e os dados de injeção a pontos no lado $[G, W]$ do triângulo de saturações.

As chamadas funções de fluxo fracionário do sistema (1.1), obtidas a partir do modelo de Corey para as permeabilidades quadráticas, são dadas por

$$\begin{aligned} f_w(s_w, s_o, s_g) &= \frac{s_w^2 / \mu_w}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \\ f_o(s_w, s_o, s_g) &= \frac{s_o^2 / \mu_o}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \\ f_g(s_w, s_o, s_g) &= \frac{s_g^2 / \mu_g}{\lambda(s_w, s_o, s_g)}, \end{aligned} \quad \lambda(s_w, s_o, s_g) = \frac{s_w^2}{\mu_w} + \frac{s_o^2}{\mu_o} + \frac{s_g^2}{\mu_g}, e \quad (1.2)$$

$$s_g = 1 - s_w - s_o.$$

Onde as constantes que representam as viscosidades das fases são dadas de modo que, embora sejam consideradas constantes, a viscosidade do gás é tomada inferior às outras duas, isto é, obedecendo as relações

$$\mu_g = \frac{1}{4} \mu_w = \frac{1}{4} \mu_o.$$

Metodologia

Segundo (SMOLLER, 1994), entre outros, para se determinar a solução de um problema de Riemann para um sistema de leis de conservação do tipo hiperbólico como em (1.1) é necessário conhecer a geometria das chamadas curvas de Hugoniot relacionando descontinuidades, ou ondas de choque, os valores característicos e as curvas integrais dos campos característicos da linearização do sistema de EDPs que definem as chamadas ondas de rarefação, bem como se as descontinuidades

parametrizadas pelas curvas de Hugoniot são admissíveis à solução ou não, seguindo um determinado critério de entropia. Neste trabalho é utilizada a chamada condição de entropia de viscosidade, sendo que a matriz de viscosidade é tomada como a matriz identidade como em (ISAACSON, et. al., 1992).

Para o problema (1.1) aqui considerado, a metodologia consiste, inicialmente, em se determinar estados especiais ao longo do lado $[W, O]$ do triângulo de saturações que definem segmentos disjuntos para estados de produção P cuja construção da solução ocorra de maneira distinta. Fixado então um estado P representativo num destes segmentos, de maneira análoga determinamos os estados especiais ao longo do lado $[G, W]$ que definem segmentos disjuntos para estados de injeção I cuja estrutura de ondas que compõem a solução seja distinta.

Uma vez fixado o estado P , devemos estudar em detalhes a curva de Hugoniot por P , denotada por $H(P)$, com relação a sua geometria e a admissibilidade, segundo o critério de entropia de viscosidade com matriz identidade, dos choques que relacionam um estado arbitrário M de $H(P)$, ao estado base P . Feito isto, devemos ainda analisar a possibilidade de atingir P a partir de um estado I no lado $[G, W]$ por uma onda composta consistindo de uma onda de rarefação, seguida de uma onda de choque.

Usaremos a seguinte notação para representar as ondas tanto nas figuras como na sequência de ondas que compõe a solução: choque-1 por S_1 , choque-2 por S_2 , choque transicional por S_x e choque compressivo por S_c . A velocidade do choque entre um estado arbitrário A e B é denotada por $\sigma(A; B)$, ficando implícito que tanto A está na curva de Hugoniot por B , como B está na curva de Hugoniot por A . Os valores característicos, ou autovalores, do sistema (1.1) são denotados por λ_1 e λ_2 , sendo fixado que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Com relação às rarefações, denotaremos uma onda de rarefação-1 por R_1 e de rarefação-2 por R_2 . Além disso, utilizamos as notações $(RS)_1$ (ou $(RS)_2$) para representar uma onda composta formada por uma onda de rarefação-1 (ou rarefação-2) adjacente a uma onda de choque-1 (ou choque-2), $(RS)_{1c}$ para uma onda composta formada por uma rarefação-1 adjacente à um choque compressivo e $(RS)_{1x}$ para uma onda composta transicional formada por uma rarefação-1 adjacente à um choque transicional.

Resultados e Discussão

Baseados na metodologia apresentada, verificamos a existência de um estado $\bar{U}$ no interior do triângulo de saturações onde os valores característicos do sistema (1.1) são coincidentes. Este ponto é conhecido na literatura como *ponto umbílico*. Outros pontos importantes na construção são os vértices G , W e O do triângulo de saturações e o ponto D definido pela interseção do segmento de reta pelos pontos G e $\bar{U}$ com o lado $[W, O]$. O papel deste ponto D na construção da solução é relevante porque ele determina mudança na geometria das curvas de Hugoniot por pontos P acima ou abaixo de D .

Estados especiais de produção

Uma questão pertinente é saber se, além deste estado D , existem outros estados de produção no lado $[W, O]$ que separam segmentos para o estado de produção P cujas construções da solução do problema de Riemann sejam distintas para P num ou outro destes segmentos. Feitos os cálculos encontramos dois outros estados P_1 e P_2 ao longo do segmento $[W, O]$, os quais estão relacionados a um terceiro estado, denotado por T^D no segmento $[W, \bar{U}]$ interior ao triângulo de saturações, e ao próprio estado D de acordo com a cadeia de igualdades:

$$\lambda_1(T^D) = \sigma(T^D; D) = \sigma(T^D; P_1) = \sigma(T^D; P_2) = \sigma(D; P_1) = \sigma(D; P_2).$$

Dessa forma os segmentos ao longo do lado $[W, O]$ do triângulo de saturações que representarão dados de produção P com construções de soluções distintas são: $[O, P_1]$, $(P_1, D]$, $(D, P_2]$ e $(P_2, W]$. Dado a limitação de espaço, descreveremos neste trabalho apenas a solução do problema de Riemann para estados de produção representativos do segmento $[O, P_1]$. Os demais casos podem ser encontrados em (GUEDES, 2009).

Para o caso do estado de produção $P = O$, isto é, no caso de um reservatório virgem, a solução foi descrita em (AZEVEDO et al., 2009). Tratemos então o caso em que o estado de produção P não coincide com O , mas está ainda próximo dele no segmento $(O, P_1]$ do lado $[W, O]$, representando ainda uma situação próxima do caso de um reservatório virgem, porém agora possuindo um pequeno percentual de água.

A curva de Hugoniot para um determinado estado de produção P representativo do segmento $(O, P_1]$ consiste do próprio lado $[W, O]$ além de dois ramos de hipérbole, um deles contendo P e outro não, conforme exibido na Figura 1-(a). Após a análise, via métodos computacionais, da condição de entropia verificamos que a curva de Hugoniot $H(P)$ possui os seguintes segmentos correspondentes à estados genéricos M tais que o choque-2 de M para P seja admissível: $[G_*, \bar{C}]$ no interior e $[W_*, P)$ no lado $[W, O]$ do triângulo de saturações, onde os estados $\bar{C}$, G_* e W_* são tais que $\sigma(\bar{C}; P) = \lambda_1(\bar{C})$, $\sigma(W_*; P) = \lambda_2(W_*)$ e $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$. Além destes segmentos, determinamos também o estado C_* na curva de Hugoniot $H(P)$, exibido na Figura 1-(b), o qual também tem papel relevante na construção da solução. O estado C_* é tal que $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$.

O estado C_*^W no segmento $[W_*, D]$ de choque-2 no lado $[W, O]$ e o estado C_*^G no segmento de choque-2 de $H(P)$ com extremidade G_* , também exibidos na Figura 1-(b), satisfazem a seguinte cadeia de igualdades:

$$\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; P) = \sigma(C_*^G; P) = \sigma(C_*; C_*^G) = \sigma(C_*^W; P) = \sigma(C_*; C_*^W).$$

Estados especiais de injeção

Uma vez determinados os estados especiais na curva de Hugoniot por P , determinamos então os estados especiais ao longo do lado $[G, W]$ que definem os segmentos distintos para se considerar as proporções de água e de gás na mistura a ser injetada.

Os estados de injeção C , I^{W_*} e I^{G_*} do lado $[G, W]$ na Figura 1-(b) são definidos como sendo os estados para os quais a solução do problema de Riemann com dados de injeção $I = C$, $I = I^{W_*}$, $I = I^{G_*}$, e dados de produção C_*^W (ou C_*^G), W_* e G_* , respectivamente, constitui de apenas uma onda composta consistindo de uma onda de rarefação-1, seguida de um choque-1 característico à esquerda.

Sequencias de ondas que compõem as soluções

Dessa maneira, se o estado de produção P estiver no segmento $(O, P_1]$ do lado $[W, O]$, então as sequencias de ondas que compõe as soluções do problema de Riemann para dados de injeção na

fronteira $[W, G]$ do triângulo de saturações ficam completamente determinadas pelos estados especiais de injeção C , I^{W*} e I^{G*} como a seguir, as quais podem ser acompanhadas na Figura 1-(b):

- a) Se $I = W$, ou seja, se for injetado apenas água, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é dada pela conhecida solução da equação de Buckley-Leverett com a função de fluxo do óleo f_o restrita à fronteira $[W, O]$ do triângulo de saturações. Portanto, a sequencia de ondas que compõe a solução é dada por uma onda de rarefação-2 de W para W_* , seguida de uma onda de choque-2, característico à esquerda, de W_* para P ;
- b) Se $I \in [I^{W*}, W)$ então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M no segmento (W, W_*) do lado $[W, O]$, seguida de uma composta-2 de M para P . A onda composta-1 consiste de uma rarefação-1 de I para o estado T no segmento $(W, T^{W*}]$, seguida de um choque-1 de T para M , com $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$. Já a composta-2 consiste de uma rarefação-2 de M para W_* , seguida de uma onda de choque-2 de W_* para P , com $\sigma(W_*; P) = \lambda_2(W_*)$. Observamos que a onda composta-2 também pode ser vista como a solução da equação de Buckley-Leverett para a função de fluxo fracionário f_o restrita ao lado $[W, O]$ com dados iniciais M e P . Observamos também que se $I = I^{W*}$ então $T = T^{W*}$ e $M = W_*$;
- c) Se $I \in (C, I^{W*})$, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , onde M é um estado no segmento (W_*, C_*^W) do lado $[W, O]$ do triângulo de saturações, seguida de um choque-2 de M para P . Como no item (b) a composta-1 consiste de uma onda de rarefação-1 de I para T seguida de um choque-1 de T para M , com $T \in (T^{W*}, C_*)$ e com $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$.
- d) Caso crítico: se $I = C$, então como consequencia da chamada regra do choque triplo, a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann pode ser descrita de três maneiras distintas no espaço de estados, porém representando a mesma solução no espaço físico-xt:
 1. Composta-1 de C para C_*^W , seguida de um choque-2 de C_*^W para P . A composta-1 é constituída por uma onda de rarefação de C para C_* , seguida pelo choque-1 de C_* para C_*^W , com $\sigma(C_*; C_*^W) = \lambda_1(C_*)$;
 2. Composta-1 de C para C_*^G , seguida de um choque-2 de C_*^G para P . Neste caso, a composta-1 é constituída pela onda de rarefação de C para C_* , seguida por um choque-1 de C_* para C_*^G , com $\sigma(C_*; C_*^G) = \lambda_1(C_*)$;
 3. Apenas uma onda composta de C para P , definida pelo segmento de rarefação $[C, C_*]$ e pelo choque compressivo de C_* para P , com $\sigma(C_*; P) = \lambda_1(C_*)$. Como sabemos, o choque compressivo pode ser visto como a sequencia de um choque-1 seguido de um

choque-2, ambos com a mesma velocidade. O que corresponde às mesmas soluções nos itens (1) e (2) no espaço físico-xt.

Lembramos que, devido a regra do choque triplo temos a seguinte cadeia de igualdades:

$$\lambda_1(C_*) = \sigma(C_*; C_*^W) = \sigma(C_*^W; P) = \sigma(C_*; P) = \sigma(C_*; C_*^G) = \sigma(C_*^G; P).$$

- e) Se $I \in [I^{G_*}, C)$ então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída de uma composta-1 de I para M , com M no segmento $[G_*, C_*^G]$ da curva de Hugoniot pelo estado P , seguida de um choque-2 de M para P . De maneira análoga ao caso (c), a composta-1 é constituída de uma onda de rarefação-1 de I para o estado T no segmento $[T^{G_*}, C_*]$, com $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$. Se $I = I^{G_*}$, então $T = T^{G_*}$ e $M = G_*$;
- f) Se $I \in (G, I^{G_*})$, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann é constituída por uma composta-1 de I para M , com M na curva integral da família característica-2, denotada por (G, G_*) , seguida de uma composta-2 de M para P . A onda composta-1 é constituída pela rarefação-1 de I para T no segmento (G, T^{G_*}) , seguida pelo choque-1 de T para M , com $\sigma(T; M) = \lambda_1(T)$. A composta-2 consiste de uma onda de rarefação-2 de M para G_* , seguida pelo choque-2 de G_* para P , com $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$;
- g) Se $I = G$, ou seja, se for injetado apenas gás, então a sequencia de ondas que compõe a solução do problema de Riemann só consiste de uma composta-2 de G para P . Esta composta é formada de uma onda de rarefação de G para G_* , seguida por um choque-2 de G_* para P , com $\sigma(G_*; P) = \lambda_2(G_*)$. Veja que neste caso a solução é análoga à solução da equação de Buckley-Leverett para o caso $I=W$, a diferença é apenas que os segmentos da curva de rarefação-2 e da curva de Hugoniot por P utilizados são internos ao triângulo de saturações. Portanto, esta situação é análoga ao caso $I = G$ de (AZEVEDO, 2009) com $P = O$, sendo que, como aqui o estado P está no segmento $(O, P_1]$ do lado $[W, O]$, a solução não envolve apenas uma mistura do tipo gás-óleo, e sim uma mistura das três componentes gás-óleo-água.

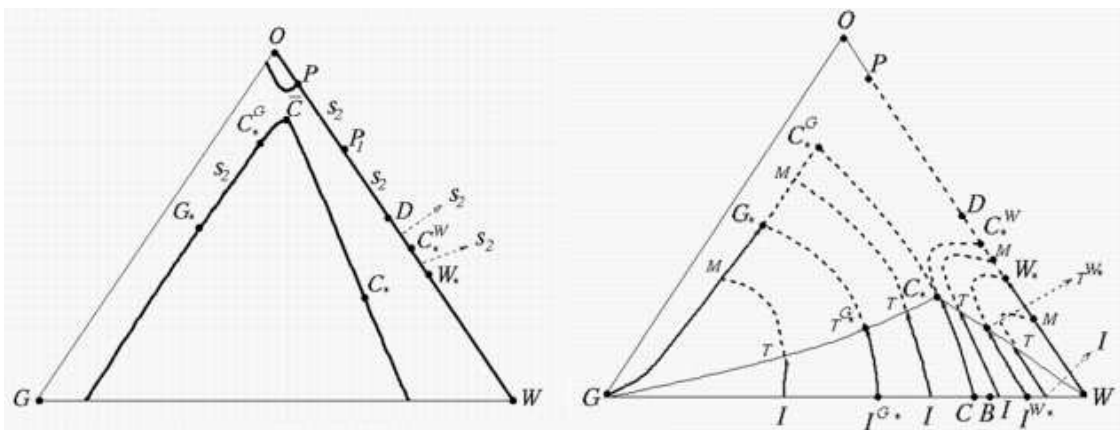


Figura 1: (a) Curva de Hugoniot pelo estado $P = (0.1, 0.9, 0) \in (O, P_1)$ representada pelas linhas grossas. (b) Esquema da solução para o caso $P \in (O, P_1)$.

Conclusões

Neste trabalho foi construída a solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação modelando um escoamento trifásico em meio poroso com composição inicial sendo uma mistura de água e óleo e dados de injeção uma mistura de água e gás. Construída a solução para um dado de produção P próximo da situação de um reservatório virgem, e comparando a solução aqui obtida com a solução da situação descrita em (AZEVEDO, et. al., 2009) para o caso de um reservatório virgem, concluímos que há estabilidade da solução em relação aos dados de injeção e de produção. Para o estado P de produção fixado mostramos a existência de estados de injeção especiais que separam construções distintas de soluções no espaço de estados, sendo que é mantida a existência de um caso crítico de injeção para o qual há três maneiras distintas de escrever a solução no espaço de estados, mas representando a mesma solução no espaço físico-xt. Simulações numéricas mostram que o caso crítico corresponde à melhor estratégia de injeção, isto é, a que otimiza a recuperação do óleo residente no reservatório.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFCG pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho. À Agência Nacional de Petróleo (ANP), ao Programa de Recursos Humanos (PRH-25) e aos demais órgãos financiadores deste trabalho, CTBRASIL, CTPETRO, FINEP e CNPq.

Referências Bibliográficas

AZEVEDO, A. V.; SOUZA, A. J.; FURTADO, F.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. The Riemann solution for three-phase flow in a porous medium. Proceedings of the 12th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications - HYP2008, Maryland USA, 2009.

BELL, J. B.; TRANGENSTEIN, J. A.; SHUBIN, G. R. Conservation Laws of Mixed Type Describing Three-Phase Flow in Porous Media. Exxon Production Research Co, 1985.

CHAVENT, G.; JAFFRÉ J. Mathematical Models and Finite Element Methods for Reservoir Simulation, Studies in Mathematics and its applications series. Vol. 17, North-Holland, 1986.

GUEDES, M. J. F. Estrutura de Ondas para um Modelo de Escoamento Trifásico com Viscosidades das Fases Assimétricas. Dissertação de Mestrado do PPGMat da UFCG, 2009.

ISAACSON, E. L.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J.; TEMPLE, J. B. Multiphase Flow Models with Singular Riemann Problems. Comput. Appl. Math, v.11, n.º 2, p. 147-166, 1992.

SMOLLER, J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, 1994.

SOUZA, A. J. Stability of Singular Fundamental Solutions under Perturbations for Flow in Porous Media. Comput. Appl. Math, v.11, n.º 2, p. 73-115, 1992.