

6º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



Título do trabalho:

Otimização Simultânea de Locação de Poços e Alocação Dinâmica das Vazões de Produção em Reservatório Caracterizado Geoestatisticamente.

AUTORES:

Liliane de A. Fonseca
Ézio da R. Araújo

INSTITUIÇÃO:

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 6º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 6º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 09 a 13 de outubro de 2011, em Florianópolis-SC. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 6ºPDPETRO.

Otimização Simultânea de Locação de Poços e Alocação Dinâmica das Vazões de Produção em Reservatório Caracterizado Geoestatisticamente

Abstract

This paper proposes a methodology for well placement optimization simultaneously with dynamic optimization of well rate allocation under geological uncertainty. This type of well placement and rate control and optimization problem originates from the needs of take in of advantage of a smart field technology. One of the main problems for the use of these techniques is that fields and reservoir are geostatistically characterized, meaning that a large number of realizations of the geological reservoir properties are to be simulated at each evaluation of the objective function. The stochastic problem is solved by Monte Carlo method, and the optimization of stochastic objective functions is solved with a random difference algorithm that only uses two measurements of the objective function, doing Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA). The linear bound constraints are accounted for using projection techniques, and the nonlinear risk constraints are treated using penalty functions. The proposed methodology solves optimization problems of the integer-mixed type with thousands of control variables and do not risk to be trapped by random noise due to limited use of geostatistical realizations.

Introdução

Este artigo propõe uma metodologia para a otimização estocástica da locação de poços simultânea com a alocação dinâmica das vazões de produção e injeção em reservatórios de óleo caracterizados geoestatisticamente. Essa é uma demanda oriunda da utilização recente de poços com instrumentação e controle, nos quais são medidos dados de fluxo, com a possibilidade de variação das vazões de injeção e produção.

Os algoritmos de otimização estocástica utilizados não fazem uso de derivadas. Neste artigo faz-se uso de algumas variantes de algoritmos de aproximações estocásticas dos gradientes por perturbação simultânea – SPSA – permitindo que o problema de otimização com simulação estocástica seja resolvido com algumas poucas dezenas de iterações. O SPSA é um algoritmo apropriado para uso em ambientes contaminados por ruídos randômicos como resultado do uso de um número limitado de realizações geoestatísticas. É potencialmente independente do número de variáveis, permitindo aplicações com dezenas de milhares de variáveis de controle. E, sob certas condições, converge para o mínimo global.

Locação de poços em simultaneidade com alocação dinâmica das vazões de produção e injeção pertence à classe de problemas de otimização inteiro-mista. Para tais problemas, nem os métodos combinatórios nem os métodos clássicos de otimização com gradientes e hessianas são adequados. O uso de técnicas de projeção para resolver o problema com variáveis inteiras, e o de funções de penalidade adequadas para o tratamento de restrições não lineares, necessárias nos diversos problemas de otimização de portfólio comumente encontrados no desenvolvimento de reservatórios, tornaram o SPSA bastante eficiente.

Metodologia

Reservatório de Petróleo Caracterizado Estocasticamente

A metodologia é ilustrada com um reservatório modelo que consiste em uma versão estocástica do

Caso 1 (determinístico) estudado em Oliveira (2006), trata-se de um reservatório bidimensional de geometria simples, com dois poços produtores e um poço injetor de água, e período de concessão de 16 anos. Denominado de Caso 1S, o modelo considera um conjunto de realizações equiprováveis do campo de permeabilidades obtido através da técnica de simulação seqüencial gaussiana disponível na ferramenta *Geostatistics* do programa Builder, CMG (2009), que se fundamenta na biblioteca de rotinas geoestatísticas GsLib, Deutsch (1997). Foram geradas as realizações de permeabilidade horizontal, e a permeabilidade vertical considerada igual a 10% da horizontal. A porosidade foi correlacionada logaritmicamente com a permeabilidade em função de seus valores limites (25 a 250 mD), resultando na seguinte expressão de porosidade por célula: $\phi = 0.13390 + 0.08305 \cdot \log(K)$ onde K é a permeabilidade em uma dada célula, Sarma (2006).

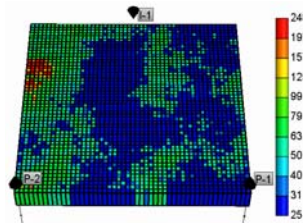


Figura 1. Reservatório modelo - realização de número 10 de permeabilidade

A Figura 1 mostra o reservatório modelo, cuja configuração de produção envolve injeção de água através de um poço injetor, I1, e produção através de outros dois poços, P1 e P2. Os poços produtores podem produzir individualmente até 12 m³/d de óleo, porém, a fim de explorar toda a potencialidade do algoritmo de otimização, foi considerado um limite na capacidade de processamento de líquidos na estação de produção de 16 m³/d. O reservatório foi modelado em uma malha com 51x51x3 células de 10x10m. Do total de células da malha, 7803 são ativas (camadas 2 e 3 inativas), produzindo o mesmo número de variáveis aleatórias correlacionadas. Todas as outras propriedades do reservatório foram assumidas determinísticas e conhecidas.

Declaração do Problema de Otimização: Alocação dinâmica de vazões de produção

Comumente, sob aspectos produtivos e econômicos, a função objetiva usual, em problemas de otimização da exploração em reservatórios de petróleo, é o valor presente líquido, VPL. As variáveis de controle são as vazões discretizadas no tempo $x_{p,t}$ - o equivalente a ajustes de *chokes* em poços inteligentes em períodos estabelecidos - e são definidas como rateios da vazão de produção, como na Equação 1:

$$x_{p,t} = q_{p,t} / \sum_{p \in P} q_{p,t}, \quad t = 1 \dots n_t \quad (1)$$

Em que $q_{p,t}$ é a vazão do poço p no intervalo de tempo t , n_t é o número de intervalos de tempo total da operação, ou seja, o número de variáveis do problema e $\sum_p q_{p,t}$ é a vazão total dos poços no tempo t , igual à capacidade da estação de produção. As variáveis de projeto são as vazões do poço P-1 ao longo do tempo de concessão, enquanto as vazões do poço P-2 são variáveis secundárias obtidas através da subtração da vazão do poço P-1 do total de vazão da estação de produção.

Ao realizar otimização com simulação das realizações a função objetiva passa a ser a esperança do VPL (EVPL) avaliada pelo método Monte Carlo. A simulação das realizações pode ser distribuída entre processadores de um *cluster* a fim de reduzir o custo computacional. E o problema de otimização é declarado de acordo com a Equação 2, April et al.(2003):

$$\max_{x_{p,t} \in R^n} EVPL(x_{p,t}, u) \quad (2)$$

Em que u são as variáveis de estado. Problemas de otimização freqüentemente apresentam-se com restrições que, ou são inerentes às funções objetivas, ou são impostas para melhorias no desempenho do processo. Quando problemas reais são tratados estocasticamente, surge a possibilidade de avaliar o risco associado à incerteza gerada. O coeficiente de variação (COV) e o desvio padrão (STD) são algumas das medidas classicamente adotadas para avaliação do risco quando a estatística de segunda ordem é suficiente. Essas restrições são sempre implícitas e não lineares, e podem ser impostas em igualdade ou desigualdade. Assim, se no problema anterior for imposta restrição em desigualdade do desvio padrão, o problema de otimização pode ser declarado pela Equação 3, Cullick et al. (2005):

$$\max_{STD \leq \overline{STD}} EVPL \quad (3)$$

em que $\overline{STD}$ é o desvio padrão especificado. Geralmente os tipos de restrições ditam as técnicas apropriadas para a otimização sob restrição. Problemas com restrições implícitas e não lineares, em geral, são bem resolvidos com funções de penalidade, Spall (2003), Wang e Spall (1999). A literatura registra implementações que, consistentemente, utilizam derivadas das funções de penalidade, também com o uso do SPSA como se pode ver em Wang e Spall (2008), Wang e Spall (1999). Porém, a determinação dessas derivadas tem sido feita deterministicamente. Neste trabalho, sendo as funções de penalidade incorporadas à função objetiva, não se acharam razões teóricas para estimar derivadas de restrições, senão através da própria estimativa estocástica do gradiente da nova função objetiva, a penalizada, dada pela equação $f = EVPL - rZ$, onde $Z = \max(0, (STD - \overline{STD})^q)$. A eficiência da técnica é função do valor adequado da constante de penalidade r e do expoente q , que nas aplicações deste trabalho foi tomado igual a um.

Otimização Inteiro-Mista: Otimização da Locação de Poços Simultânea com a Otimização de Vazões

Ao otimizar a locação de poços simultaneamente com as vazões de produção, está-se diante de um problema de otimização inteiro-mista. Na aplicação mostrada neste artigo, as variáveis de controle inteiras são as posições dos três poços, considerados centrados nos blocos, e as variáveis contínuas, as vazões de produção do poço P-1. Em princípio, otimizar com variáveis inteiro-mistas em geral, envolve dois ciclos: um ciclo externo referente à variável inteira e um interno referente à contínua, ou o inverso. As aplicações neste artigo foram realizadas com um único ciclo, com projeção das variáveis inteiras no campo contínuo, imediatamente antes da chamada do simulador do modelo *black-oil* – *IMEX*, CMG (2009).

Algoritmo de Otimização para Simulação Estocástica

Algoritmos de aproximação estocástica são apropriados para problemas que consideram as incertezas inerentes aos problemas reais. O SPSA é um algoritmo de natureza estocástica que se firma em apenas duas medidas da função, ruidosas ou não, e com desempenho independente do número de variáveis do problema, para realizar aproximações do gradiente de uma função objetiva. Essa característica permite uma redução significativa no custo da otimização, especialmente em problemas com elevado número de variáveis. Aplicações desse algoritmo com centenas e até milhares de variáveis são mostradas nas referências Spall (2003) e Fonseca (2010). A implementação do SPSA na forma básica, sem restrições, é mostrada em Spall (1998) e Spall (2003).

Resultados e Discussão

Otimização de Vazões de Produção

Inicialmente, foram consideradas duas etapas de controle, o que corresponde a uma alteração na vazão do poço P1 seis anos após o início da produção. O fato de o SPSA permitir o uso de elevado número de variáveis sem custo computacional adicional, possibilitou o estudo do comportamento do reservatório com maior número de variáveis, ou seja, o equivalente a mudanças na vazão de produção a cada semestre, mês, quinzena e dia, correspondendo a 24, 144, 288 e 4320 variáveis de controle. A Tabela 1 mostra resultados da otimização com o SPSA das vazões de produção com rateio inicial de 25%. Note-se que o número de iterações k é aproximadamente constante, independente do número de variáveis. Ainda na Tabela 1, os índices 0 e f das variáveis EVPL e STD correspondem aos valores iniciais e finais da otimização.

Tabela 1. Otimização da EVPL com o algoritmo SPSA, com uso de realizações geoestatísticas.

Nº de Variáveis	Nº de Realizações	k	$EVPL_0$	STD_0	$EVPL_f$	STD_f	Ganho (%)
(1) 2	3	60	80.071,00	4,9810E+04	105.723,57	3,6903E+04	32,04
(2) 2	10	60	110.352,07	4,1253E+04	131.396,07	3,4163E+04	19,07
(3) 2	10	100	106.994,72	3,3997E+04	131.653,99	3,4208E+04	23,05
(4) 2	30	100	126.606,92	3,0725E+04	151.264,65	2,9801E+04	19,48
(5) 2	50	60	124.836,92	2,9597E+04	148.583,20	3,0714E+04	19,02
(6) 24	50	20	124.836,92	2,9597E+04	149.342,39	3,1186E+04	19,63
(7) 144	50	96	124.836,92	2,9597E+04	149.239,38	3,0892E+04	19,55
(8) 4320	50	53	129.302,29	3,0057E+04	148.226,27	3,0157E+04	14,64
(9) 4320	100	33	128.935,44	2,9326E+04	142.882,04	2,8770E+04	10,82
(10) 24	500	13	126.819,12	3,3198E+04	148.857,37	2,8783E+04	17,38

Otimização de Vazões de Produção com Restrição do Risco

A Tabela 2 mostra os resultados da otimização com o SPSA para o problema declarado na Equação 3. O Caso 1S com 50 realizações e duas variáveis de controle foi escolhido, por possibilitar a visualização do caminho percorrido pelo algoritmo sobre a superfície aproximada da EVPL e do STD, com valor de 2,95E+04 para o desvio padrão especificado ($\overline{STD}$).

Tabela 2. Otimização com restrição do STD em desigualdade – com 50 realizações geoestatísticas.

(Rodada) – Rateio inicial (%)	r	k	$EVPL_0$	STD_0	$EVPL_f$	STD_f	$\overline{STD}$	Ganho (%)
(1) - 25	1	79	124.836,92	2,96E+04	147.936,96	2,99E+04	> 2,95E+04	18,50
(2) - 25	5	75	124.836,92	2,96E+04	147.156,68	2,94E+04	< 2,95E+04	17,88
(3) - 75	1	41	126.657,03	3,62E+04	149.569,64	3,13E+04	> 2,95E+04	18,09
(4) - 75	5	155	126.657,03	3,62E+04	146.400,10	2,91E+04	< 2,95E+04	15,59

Foram quatro otimizações com pontos de partida de 25% e 75%, todas com restrição de desigualdade do desvio padrão. As rodadas (1) e (3) não atenderam ao risco especificado, enquanto as rodadas (2) e (4) obedeceram, devido a um aumento da constante r de penalidade. O ganho relativo da EVPL foi menor nas otimizações cujas restrições de risco foram obedecidas, ou seja, nas rodadas (2) e (4).

O uso de parâmetros adequados, do algoritmo e da constante de penalização, possibilitou a convergência não só para a região viável como para o máximo valor da função objetiva dentro da região viável. Isto é mostrado nas Figuras 2(a) e 2(b) nas quais a trajetória da rodada (4) sobre o par de superfícies EVPL-STD desvia-se do EVPL máximo (destacado em preto) para alcançar o máximo EVPL da região viável (destacada em círculos nas superfícies). As Figuras 2(c) e 2(d) mostram os histogramas para as rodadas (2) e (4) na 1ª e na última iteração das otimizações, atenta-se para a

redução na largura da base do histograma para a última iteração, indicando que houve uma redução da dispersão em torno da média.

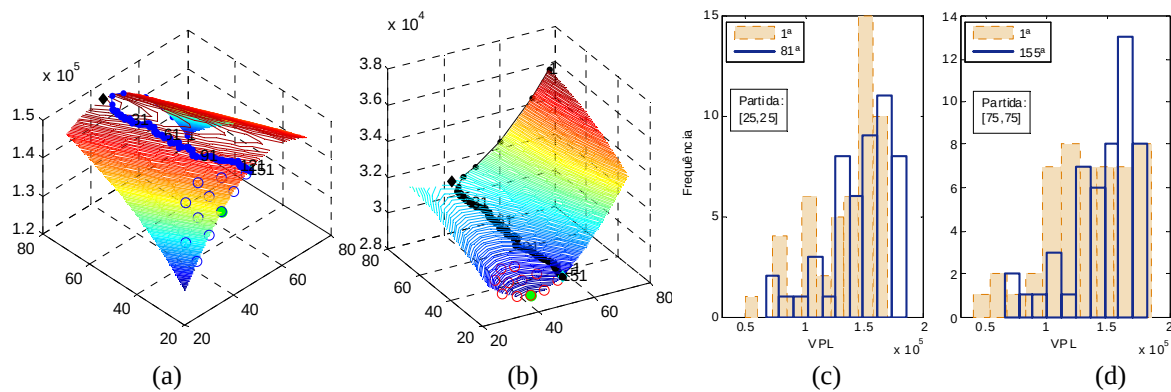


Figura 2. Percurso do SPSA sobre as superfícies (a) da EVPL e (b) do STD. Histogramas da EVPL antes e após a otimização, (c) para a rodada (2) e em (d) para a rodada (4).

Otimização Simultânea da Locação de Poços e Vazões de Produção

Considerando a incerteza oriunda das realizações de permeabilidade, foi realizada uma otimização simultânea de locação de poços e vazões de produção com o SPSA adaptado, projetando as variáveis inteiras no campo contínuo. Os poços foram centrados nos blocos e suas posições foram configuradas em coordenadas cartesianas, nas direções X, Y e Z. Usualmente os poços são locados em regiões preferenciais, selecionadas por geólogos conjuntamente com engenheiros de reservatórios. Assim, foram pré-definidas fronteiras para as regiões de possibilidades de localização dos três poços, de forma que no processo de otimização são equivalentes a restrições lineares, e ao infringir uma restrição em uma direção, a variável é projetada na fronteira estabelecida. A Figura 3(a) mostra a malha do reservatório, cujas fronteiras citadas estão destacadas em vermelho e os poços posicionados no ponto de partida do algoritmo, escolhido por ser desfavorável à exploração e com o fim de testar o desempenho do algoritmo SPSA.

Em Bangerth *et al.* (2004) para obter o máximo VPL que pode ocorrer antes do fim do período de concessão, os autores estabeleceram como função objetiva a curva do VPL obtida após maximizações no domínio de sub-períodos do tempo de concessão, com $T_1 < T_2 < T_3 < \dots < T_f$ onde T_f é o tempo final de concessão – ou seja, buscaram o máximo VPL no período de produção.

Neste estudo, a função objetiva escolhida foi a EVPL máxima no tempo de concessão, na qual uma série de problemas de otimização foi transformada em um único problema, detalhes dessa aplicação são mostrados em Fonseca (2010). As restrições originais de vazões foram mantidas.

As Figuras 3(b) e 3(c) mostram a superfície de resposta da EVPL máxima e do STD, respectivamente, ao variar um dos poços dentro do domínio delimitado pelas suas fronteiras, fixando os outros dois nas posições originais: P1(51,51), P2(1,51) e I(26,1); que podem ser visualizadas na Figura 1. As Figuras 3(b) e 3(c) ilustram uma idéia da complexidade desta aplicação, visto que considera a otimização da locação dos três poços ao mesmo tempo e simultaneamente com a otimização das vazões dos poços produtores. Note-se que as regiões de menor STD são desconexas.

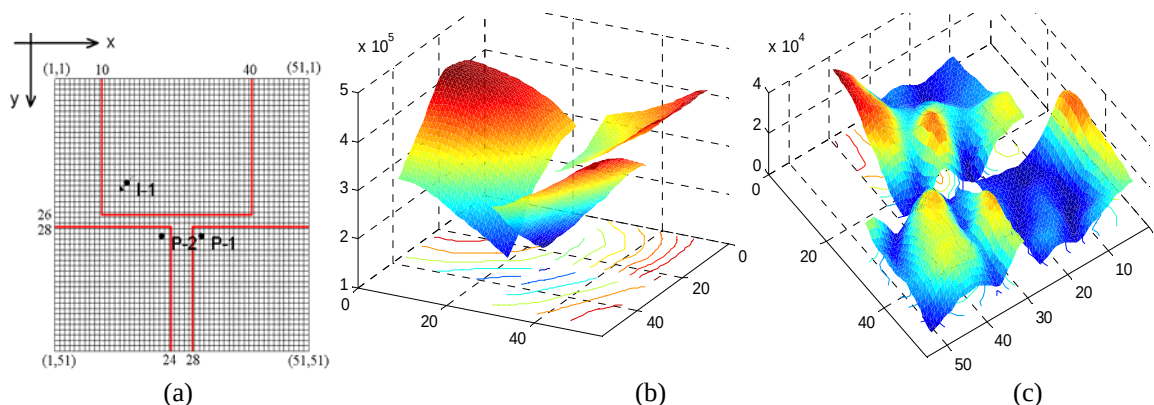


Figura 3. (a) Posições iniciais dos poços e suas fronteiras de locação. Superfícies com 3 realizações geoestatísticas ao (b) da EVPL e (c) do STD, com variações da posição de um poço por vez.

A Tabela 3 mostra alguns resultados para esta aplicação, cuja rodada (1) considera os três poços fixos em suas posições originais para comparação do valor da EVPL para as possibilidades das posições otimizadas. Com exceção das rodadas (4) e (5) que tiveram partida em 50%, todos os testes tiveram partida em 25% da vazão da estação de produção para o poço P1 nas duas etapas de controle, e são registradas as posições dos máximos valores obtidos da EVPL máxima. Ainda na Tabela 3, nota-se uma tendência dos poços P1 e P2 serem posicionados nas mesmas coordenadas para todos os números e natureza de realizações testadas. As vazões T1 e T2 são referentes às duas etapas de controle do poço P1 e optou-se por deixá-las no domínio contínuo.

Tabela 3. Resultados da otimização inteiro-mista.

#	Nº de Realizações	N	r	EVPL ₀	EVPL (máxima)	k	P1		P2		I		Vazão (%)	
							X	Y	X	Y	X	Y	T1	T2
(1)	3	200	-	372.837,11	408.702,31	65	51	51	1	51	26	1	53,96	25,00
(2)	3	1000	-	55.239,73	420.579,09	128	49	51	24	51	18	6	75,00	42,11
(3)	3	1000	5	55.239,73	360.556,88	294	51	51	24	51	22	17	61,29	39,52
(4)	3	712	-	63.802,68	417.430,31	58	51	51	24	51	22	3	54,12	72,81
(5)	3	632	8	63.802,68	331.615,05	263	48	48	23	51	21	21	68,03	53,43
(6)	10	500	-	52.261,95	410.302,47	210	51	51	24	51	19	7	75,00	71,82
(7)	30	500	-	52.231,32	403.647,35	205	51	51	24	51	21	6	69,92	50,72
(8)	50	352	-	52.268,05	363.448,77	325	51	51	24	51	26	12	54,07	63,26

Duas observações fazem-se pertinentes. A primeira é que o algoritmo SPSA, pertencente à classe de algoritmos de aproximação estocástica e em sua forma básica, não guarda os valores máximos alcançados em sua trajetória. Fato que estimulou o desenvolvimento de uma versão, denominada de SPSA-C, capaz de registrar os potenciais máximos ao longo de sua trajetória e portanto mitigar as conhecidas dificuldades no estabelecimento dos parâmetros ótimos de algoritmos de otimização estocástica. A versão SPSA-C permite ainda, fazer reinicializações com parâmetros adequados para a otimização local.

Observe-se também o aumento do risco ao maximizar o EVPL, levando à necessidade de sua mitigação, e portanto de uma otimização sob restrição de risco. Assim, escolheu-se a rodada (2) cujo gráfico da EVPL está na Figura 4(a), para teste da otimização sob uma restrição em desigualdade de um risco especificado em $\overline{STD} = 0,2E + 04$. Os resultados correspondem aos da rodada (3) da Tabela 3.

O comportamento da EVPL durante a otimização simultânea da locação de poços e vazões de produção antes e após a restrição do risco é mostrado, respectivamente, nas Figuras 4(a) e 4(c) correspondentes às rodadas (2) e (3) da Tabela 3. As Figuras 4(b) e 4(d) mostram o comportamento do

STD durante a otimização com e sem restrição. A linha em verde mostra o desvio padrão especificado, de valor $0,2E+04$. Da Figura 4(d) nota-se a obediência à restrição imposta a partir da iteração 343, e por volta da iteração 740 o poço injetor oscila entre as posições I(22,26) e I(23,26). Os gráficos com rateios iniciais em 50% tiveram comportamentos similares aos de partida 25%.

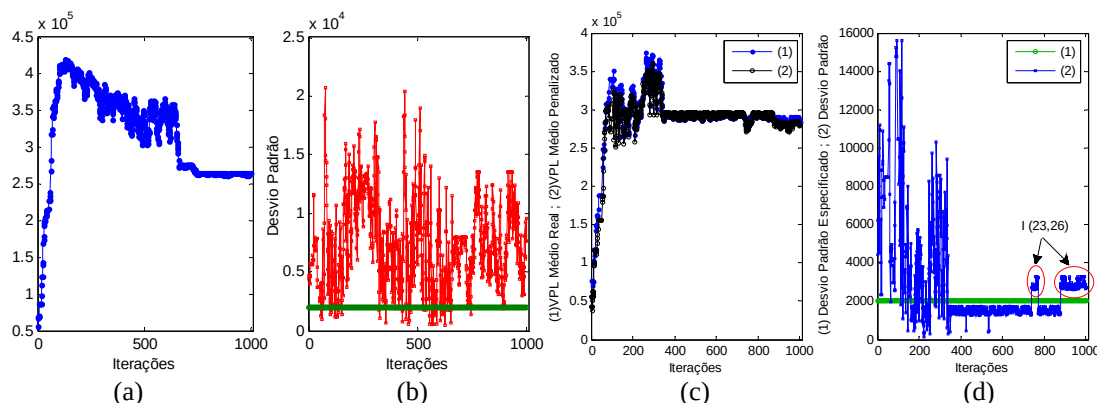


Figura 4. Otimização antes e após restrição de risco (partida das vazões a 25%): (a) EVPL real e penalizada e (b) STD, ao longo das iterações.

A Figura 5 mostra as posições dos poços nos máximos valores encontrados para a EVPL na otimização. As figuras foram numeradas de acordo com os casos mostrados na Tabela 4, que mostra um resumo para a otimização simultânea com 3 realizações. Da Figura 5, nas configurações dos poços em (2) e (3) vê-se que a otimização simultânea de locação de poços e vazões modificou as posições dos poços produtores localizados nas posições originais. Enquanto a otimização com restrição de risco modificou sensivelmente a posição do poço injetor, como pode-se ver nas configurações (4) e (5) da Figura 5.

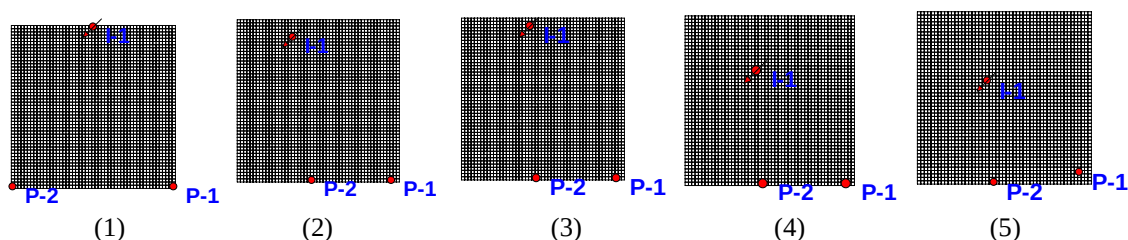


Figura 5. Arranjo dos poços após otimização com SPSSA. (1) Posições originais, (2) e (3) locação de poços sem restrição e partidas 25% e 50% respectivamente; (4) e (5) com restrição de risco e partidas 25% e 50% respectivamente.

Tabela 4. Sumário da otimização simultânea de locação de poços e vazões de produção para 3 realizações.

Casos / [Vazão inicial]	r	EVPL	STD	$\overline{STD}$	Iteração
(1) C1S original	-	408 702,31	2,27E+04	$> 0,2E+04$	65
(2) [25,25]	-	420 579,09	0,33E+04	$> 0,2E+04$	128
(3) [50,50]	-	417 430,31	1,36E+04	$> 0,2E+04$	58
(4) [25,25]	5	360 556,88	0,11E+04	$< 0,2E+04$	294
(5) [50,50]	8	331 615,05	0,19E+04	$< 0,2E+04$	263

Conclusões

O programa desenvolvido faz uso de algoritmos capazes de fazer otimização eficiente com milhares de variáveis de controle, suportar o uso de variáveis inteiro-mistas e de diversas funções objetivas, além disso, funções de penalidade resolveram bem as restrições não lineares.

Do ponto de vista de engenharia, neste problema, concluiu-se que a otimização simultânea de locação de poços e vazões modificou as posições dos poços locados nas posições originais. A otimização simultânea de locação e vazões dos poços com restrição modificou sensivelmente a posição do injetor. Por fim, a otimização simultânea de locação de poços e vazões de produção com incerteza geoestatística torna-se tratável com o SPSA.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao PRH-26 e à Petrobras.

Referências Bibliográficas

APRIL, J. GLOVER, F., KELLY, J., LAGUNA, M., ERDOGAN, M., MUDFORD, B.; STEGEMEIER, D., Advanced Optimization Methodology in the Oil and Gas Industry: The Theory of Scatter Search Techniques with Simple Examples, SPE 82009, SPE Hydrocarbon Economics and Evaluation Symposium, Dallas, Texas, U.S.A., 2003.

BANGERTH, W., KLIE, H., STOFFA, P. L., On Optimization Algorithms for the Reservoir Oil Well Placement Problem, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2004.

COMPUTER MODELING GROUP Ltd; Builder 2009.10 e IMEX 2009.10; User's Guide; Manuais de Referência, 2009.

CULLICK, A. S., NARAYANAN, K., GORELL, S., Optimal Field Development Planning of Well Locations With Reservoir Uncertainty, SPE 96986, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, U.S.A., 2005.

DEUTSCH, C.; JOURNAL, A., GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide, 340 pp., 1997, Oxford University Press.

FONSECA, L. A., Otimização para Simulação Estocástica de Reservatórios de Petróleo: Algoritmos de Diferenças Randômicas Simultâneas, Dissertação de Mestrado, UFPE, 2010.

OLIVEIRA, D. F. B., Técnicas de Otimização da Produção para Reservatórios de Petróleo, 116f, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2006.

SARMA, P., Efficient Closed-Loop Optimal Control of Petroleum Reservoirs under Uncertainty, Dissertação Ph.D., Stanford University, 2006.

SPALL, J. C., Adaptive Stochastic Approximation by the Simultaneous Perturbation Method; Proceeding of the 37 IEEE Conference on Decision & Control, Florida USA, 1998.

SPALL, J. C., Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation and Control, Wiley-Interscience, 2003.

WANG, I.-J., SPALL, J. C., A Constrained Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation Algorithm Based on Penalty Functions, Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California, 1999.

WANG, I.-J.; SPALL, J. C., Stochastic optimization with inequality constraints using simultaneous perturbations and penalty functions, International Journal of Control, Vol. 81, No. 8, 1232-1238, 2008.