

6º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

“Solução do problema de Buckley-Leverett via formulações explícita e totalmente implícita do método *Upwind* de Primeira Ordem”

AUTORES:

Pedro Henrique França Fulco¹; Darlan Karlo Elisiário de Carvalho¹; Paulo R. M. Lyra¹; Tatiana Balbi Fraga¹

INSTITUIÇÃO:

¹Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 6º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 6º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 09 a 13 de outubro de 2011, em Florianópolis-SC. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 6ºPDPETRO.

“Solução do problema de Buckley-Leverett via formulações explícita e totalmente implícita do método *Upwind* de Primeira Ordem”

Abstract

When dealing with reservoir simulations, one of the important tasks consists of simulating the behavior of some reservoir fluid parameters, such as oil and water saturations. These simulations allow the prediction of oil bearing rocks production potential, when applying some specific production techniques, and can point to the correct application of methods that can maximize the gains to be produced by oil fields. In this context, the Buckley-Leverett equation places an important role, once it can be applied to compute the relative amounts of the fluids, oil and water, which are still present in the reservoirs, from other parameters that can be easily determined such as the relative permeability between fluids and the speed of the water flow in injection wells. Since Buckley-Leverett equation is a nonlinear differential equation, numerical methods are needed for its solution and linearization. In the present work the Buckley-Leverett equation is solved for one-dimensional problem by the "Control Volume Finite Differences Method", considering both formulations: explicit and fully implicit. In the case of fully implicit formulation, the system of nonlinear equations is solved by the "Newton-Raphson Method."

The results were generated by a program developed in MATLAB. In this program the numerical formulation of the Buckley-Leverett equation was discretized by the First Order Upwind method considering both: explicit and fully implicit formulations. These results were compared with the results generated by another program in MATLAB, originally developed to solve the problem adapted from PINTO (1991) and CARVALHO (2005). In order to illustrate the performance of these methods the develop program was applied to solve a problem with a D-unit mobility ratio, and subsequently the value of this parameter was increased 10 times. In addition, simulations were performed considering different values for the Darcy velocity, yielding the expected results for such changes.

Introdução

A recuperação de petróleo em rochas reservatório envolve diferentes técnicas de produção que vão desde a simples injeção de água até a utilização de polímeros que aumentam a viscosidade da água dificultando sua chegada antecipada aos poços produtores, ou ainda a utilização de surfactantes que reduzem a tensão superficial do óleo (petróleo em sua fase líquida) de modo a facilitar sua remoção. De maneira geral, as pressões no interior das rochas reservatório são geralmente bastante altas, de tal forma que o simples fato de se perfurar um poço através da formação promove a saída espontânea de grande parte do óleo residente. Este tipo de recuperação de óleo é conhecido como recuperação primária. A técnica de recuperação secundária envolve a injeção de água através de poços injetores, de forma que esta água sirva tanto para aumentar a pressão no interior dos reservatórios, como para deslocar mecanicamente o óleo na direção dos poços produtores, e se constitui na técnica mais utilizada devido ao seu custo relativamente baixo. Outras técnicas, definidas como técnicas terciárias aparecem como uma alternativa quando o capital investido na aplicação de tais técnicas é compensado pelo aumento da produção de petróleo gerado pelas mesmas.

No caso da técnica de produção secundária, os fluidos no reservatório são basicamente a água e o óleo de forma que a identificação do potencial de produção das rochas portadoras de petróleo, assim como da correta aplicação de métodos que possam maximizar os ganhos a serem produzidos pelos campos petrolíferos, pode ser conseguida através da simulação numérica e computacional do comportamento de parâmetros tais como as saturações do óleo e da água bem como das pressões destes fluidos nos reservatórios. Nesse contexto, a equação de Buckley-Leverett (BUCKLEY e LEVERETT, 1942), que é utilizada para definir as quantidades relativas dos fluidos, óleo e água, que estão ainda presentes nos reservatórios, em função de parâmetros tais como a permeabilidade relativa entre os fluidos e a velocidade do escoamento de água nos poços injetores, constitui um importante papel para simulação do comportamento dos fluidos no reservatório. Sendo a equação de Buckley-Leverett uma equação diferencial não linear, métodos numéricos são necessários para sua linearização e solução.

Nesse trabalho a equação de Buckley-Leverett é resolvida, para um problema unidimensional, através do método “Diferenças Finitas com Volume de Controle” em conjunto com o “Método *Upwind* de Primeira Ordem” considerando-se ambas as formulações de Euler: explícita no tempo e totalmente implícita tempo. No caso da formulação totalmente implícita, o sistema de equações não lineares resultante é resolvido pelo “Método de Newton-Raphson”.

Este trabalho faz parte de um subprojeto o qual tem como principal objetivo, o desenvolvimento de um simulador “In-House” utilizando uma formulação do MDFVC (Método das Diferenças Finitas com Volume de Controle), totalmente implícita no tempo, capaz de modelar o escoamento bifásico 2-D e 3-D de água-óleo no interior de reservatórios de petróleo heterogêneos. Espera-se com isso, dominar completamente o ciclo de projeto/programação de um simulador de escoamentos em reservatórios de petróleo capaz de simular problemas complexos e altamente não-lineares. Tendo em vista que, até o momento, apenas simuladores utilizando a formulação IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) ou variações da mesma (MIMPES/*Modified-IMPES*) foram desenvolvidos e implementados por membros do grupo de pesquisa em que os autores do trabalho estão envolvidos.

Metodologia

Conforme apresentado anteriormente, a equação básica estudada é a equação de Buckley e Leverett (BUCKLEY e LEVERETT, 1942) que modela o escoamento bifásico, incompressível e imiscível de água e óleo em reservatórios de petróleo. Quando desprezados os efeitos da capilaridade e da gravidade, a equação de Buckley e Leverett apresenta-se da seguinte forma:

$$\left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_w \right) \quad (1)$$

A Equação (1) é uma equação hiperbólica não-linear onde: ϕ é a porosidade; S_w é a saturação da água; e $\vec{F}_w$ é a função de fluxo definida como $\vec{F}_w = \vec{v} f_w$, sendo $\vec{v}$ é a velocidade total ou “de Darcy” do escoamento. $f_w = \lambda_w / \lambda_T$, é a função de fluxo fracional da água, onde λ_w é a mobilidade da água e $\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o$ é a mobilidade total das fases água e óleo. A mobilidade de uma fase água, ou óleo, (indicadas respectivamente pelos índices $i = w$ ou $i = o$) é definida por $\lambda_i = k_{ri} / \mu_i$, onde μ_i é a viscosidade e k_{ri} permeabilidade relativa da fase “i”. A fim de discretizar a equação Eq. (1), integra-se a mesma no tempo e no espaço para um volume de controle pré-definido.

Para o avanço no tempo utilizam-se as formulações de primeira ordem de Euler, explícito e totalmente implícito no tempo, em conjunto com o método *Upwind* de Primeira Ordem para a resolução da Eq. (1). A seguir o Método das Diferenças Finitas com Volume de Controle (MDFVC) é apresentado juntamente com o método *Upwind* de Primeira Ordem, em suas formulações explícita e totalmente implícita, para a discretização da equação de Buckley-Leverett, e com o método de Newton-Raphson o qual é aplicado para resolução dos sistemas de equações não-lineares.

a) Método das Diferenças Finitas com Volume de Controle (MDFVC)

O método das Diferenças Finitas com Volume de Controle (MDFVC) é um método de discretização de equações diferenciais baseado nas leis de conservação. Para o caso em questão, primeiramente define-se o volume de controle do problema e aplica-se a lei de conservação da massa, posteriormente as equações resultantes do balanço realizado são integradas utilizando-se o Teorema da Divergência de Gauss e é obtida a equação para cada nó da malha computacional analisada. Matematicamente este método se apresenta da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_I} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_I = - \int_{\Omega_I} \nabla \cdot \vec{F}_w \partial \Gamma_I \Rightarrow \frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{1}{\phi \nabla_I} \int_{\Gamma_I} \vec{F}_w \cdot \vec{n} \partial \Gamma_I \quad (2)$$

b) Método *Upwind* de Primeira Ordem

No método *Upwind*, a partir das contribuições dos nós, constrói-se uma aproximação de primeira ordem e monótona no espaço em que se incorpora o sentido do transporte da informação, utilizando as seguintes expressões para o fluxo sobre um nó:

$$\left(\hat{F}_{IJ_L(w)} \right) = \hat{F}_{I(w)}, \quad \text{se} \quad \hat{F}_{IJ_L(w)} \cdot \vec{n}_{IJ_L} \geq 0 \quad (\text{Sentido } I \rightarrow J_L) \quad (3)$$

$$\left(\hat{F}_{IJ_L(w)} \right) = \hat{F}_{J_L(w)}, \quad \text{se} \quad \hat{F}_{IJ_L(w)} \cdot \vec{n}_{IJ_L} < 0 \quad (\text{Sentido } J_L \rightarrow I) \quad (4)$$

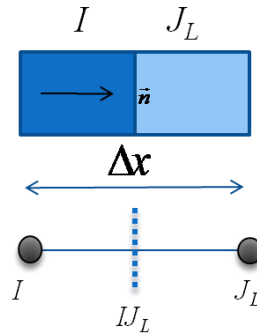


Fig. 1 – Representação de dois volumes de controle adjacentes da malha computacional

Este método, descrito nas Eqs. (3) e (4), pode ser aplicado com ambas às formulações, a explícita ou totalmente implícita.

b.1) Formulação Explícita:

Neste tipo de formulação, resolvem-se k equações, uma a uma, utilizando-se os valores das saturações que já foram calculados anteriormente. Matematicamente, têm-se a seguinte expressão:

$$S_{I(w)}^{n+1} = S_{I(w)}^n - \frac{\Delta t}{\phi \nabla_I} \sum_{L=1}^{N_{\text{vizinhos}}} \hat{F}_{IJ_L(w)}^n \cdot \vec{n}_{IJ_L} \quad (5)$$

onde os sobrescritos $n+1$ e n correspondem aos passos de tempo $t + \Delta t$ (atual) e t (anterior), respectivamente.

b.2) Formulação Totalmente Implícita:

Na formulação totalmente implícita resolve-se um sistema de equações não-lineares com k equações e k incógnitas. Matematicamente, essas equações têm a seguinte forma:

$$S_{I(w)}^{n+1} = S_{I(w)}^n - \frac{\Delta t}{\phi \nabla_I} \sum_{L=1}^{N_{Vizinhos}} \hat{F}_{IJ_L(w)}^{n+1} \cdot \vec{n}_{IJ_L} \quad (6)$$

onde os sobrescritos $n+1$ e n correspondem aos passos de tempo $t + \Delta t$ (atual) e t (anterior), respectivamente. Para resolver o sistema de equações não-lineares, utiliza-se o Método de Newton-Raphson.

b2.1) Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares é um método iterativo que tem como principal objetivo estimar a solução do mesmo através da seguinte expressão matemática (MATHEWS E FINK, 1999):

$$J(S_w^k)[S_w^{(k+1)} - S_w^{(k)}] = -g(S_w^{(k)}) \quad (7)$$

ou ainda:

$$\tilde{S}_w^{(k+1)} = \tilde{S}_w^{(k)} - G(\tilde{S}_w^{(k)}) \tilde{J}^{-1}(\tilde{S}_w^{(k)}) \quad (8)$$

onde $J(S_w^k)$ é a *matriz jacobiana* do problema dada por:

$$\tilde{J}(S_w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial S_{1(w)}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial S_{1(w)}} & \frac{\partial g_2}{\partial S_{2(w)}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\partial g_{I-1}}{\partial S_{I-2(w)}} & \frac{\partial g_{I-1}}{\partial S_{I-1(w)}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial g_I}{\partial S_{I-1(w)}} & \frac{\partial g_I}{\partial S_{I(w)}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

e tem-se que:

$$\frac{\partial g_I}{\partial S_{w_i}} = 1 - \left(\frac{\bar{v} \Delta t}{\Delta x} \right) \left\{ \frac{2(S_{I(w)} - 1)k_{rw} + [(1/VR)k_{ro}] - 2k_{rw}[(1 + (1/VR))S_{I(w)} - (1/VR) + ((1/VR) - 1)S_{wi}]}{[k_{rw} + (1/VR)k_{ro}]^2} \right\} \quad (10)$$

e,

$$\frac{\partial g_I}{\partial S_{I-1(w)}} = \left(\frac{\bar{v} \Delta t}{\Delta x} \right) \left\{ \frac{2(S_{I(w)} - 1)k_{rw} + [(1/VR)k_{ro}] - 2k_{rw}[(1 + (1/VR))S_{I(w)} - (1/VR) + ((1/VR) - 1)S_{wi}]}{[k_{rw} + (1/VR)k_{ro}]^2} \right\} \quad (11)$$

As duas formulações foram implementadas em um programa desenvolvido em MATLAB (MATTHEW, 2004), o qual também foi utilizado na etapa de pós-processamento.

Resultados e Discussão

Nos gráficos abaixo ilustrados, são apresentados os resultados obtidos com o método *Upwind* de Primeira Ordem em suas formulações explícita e totalmente implícita, para a simulação do problema de Buckley e Leverett (B-L), num domínio 1-D. As saturações residuais de água e óleo são $S_{rw} = S_{or} = 0,1$. As condições iniciais e de contorno são: $S_w(x,0) = S_{rw} = 0,1$, para $0 < x \leq 1$ e $S_w(0,t) = 1.0 - S_{or}$ para $x = 0$. Nas figuras a seguir, são apresentadas a solução semi-analítica e as soluções obtidas com as duas formulações numéricas no instante $t = 0,2$ (adimensional), para três malhas unidimensionais diferentes, com 8, 32 e 512 nós ao longo do eixo x .

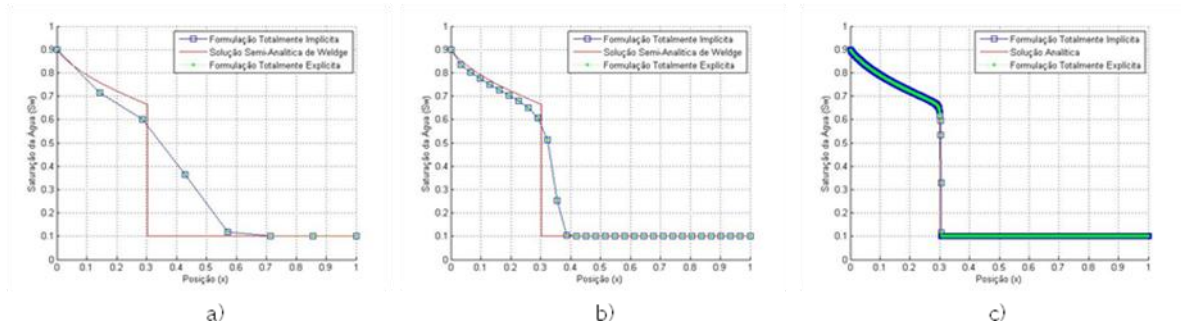


Fig. 2 – Perfil de Saturação de água com $\bar{v} = 1$ e $\mu_o/\mu_w = 1$ para malhas com: a) 8 nós; b) 32 nós; c) 512 nós

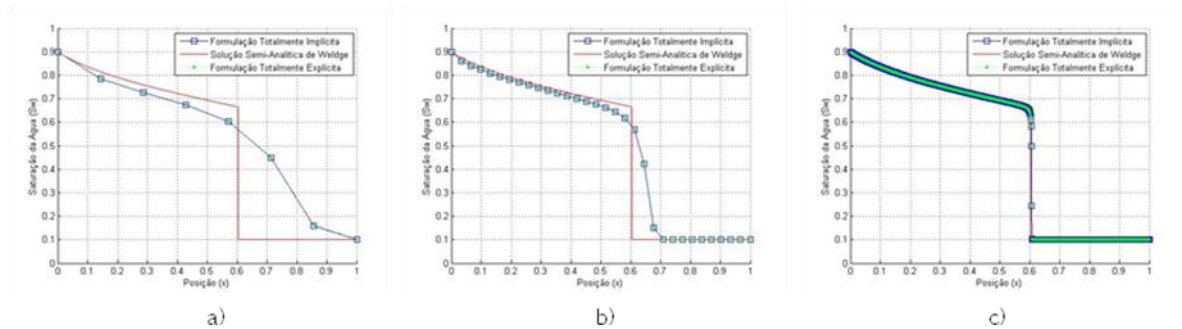


Fig. 3 – Perfil de Saturação de água com $\bar{v} = 2$ e $\mu_o/\mu_w = 1$ para malhas com: a) 8 nós; b) 32 nós; c) 512 nós

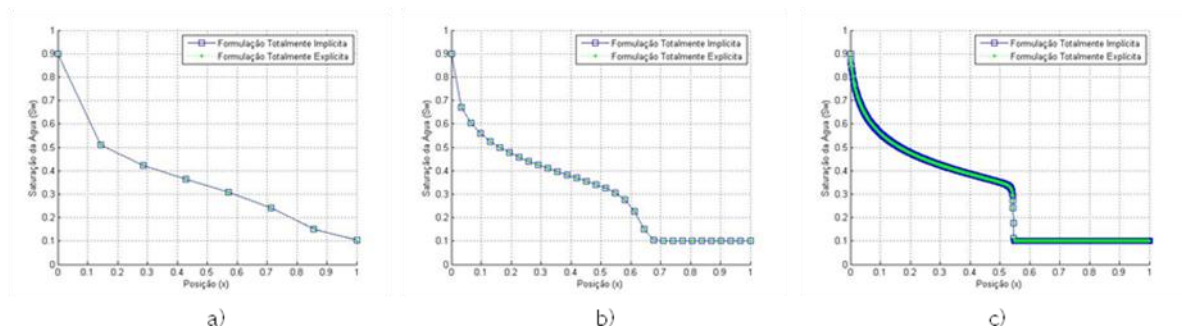


Fig. 4 – Perfil de Saturação de água com $\bar{v} = 1$ e $\mu_o/\mu_w = 10$ para malhas com: a) 8 nós; b) 32 nós; c) 512 nós

Na Fig. 1 tem-se que a razão de viscosidade óleo-água é igual a 1 e que a velocidade de Darcy para o escoamento também é igual a 1. Já na Fig. 2 foi alterada apenas o parâmetro da velocidade alternando-se de 1 para 2. Finalmente, na Fig. 3 foi rodado um caso onde a razão de viscosidade óleo-água foi aumentada em 10 vezes.

Conforme se observa nas Figs. (1a), (1b), (1c), (2a), (2b), (2c), (3a), (3b) e (3c) ambas as formulações apresentam soluções robustas, monótonas e com boa acurácia para as malhas propostas. As duas convergem para a solução analítica à medida que a malha é refinada, capturando bem, tanto a altura como a posição do “choque” de saturações.

Na Fig. 2 é perceptível o avanço da frente de saturação de água com relação a Fig. 1, este avanço é decorrente do aumento da velocidade com que a água escoar dentro do reservatório, isto corresponde a um aumento na vazão de água no poço injetor e com isso entra mais água no mesmo intervalo de tempo no meio poroso, portanto, a frente de saturação avança.

Na Fig. 3, nota-se que com o aumento da viscosidade do óleo ficou mais difícil de a água “varrer” os hidrocarbonetos para o poço produtor e com isso, a recuperação de óleo é menor e o poço produtor vai produzir água de uma maneira mais rápida.

Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se um programa, usando a linguagem de programação MATLAB, onde o método *Upwind* de Primeira Ordem nas suas formulações explícita e totalmente implícita foi implementado para solução numérica da equação de Buckley-Leverett, a qual modela o escoamento bifásico de água e óleo em meios porosos, quando são desprezados os efeitos capilares e gravitacionais. Para validação do código desenvolvido, o mesmo foi testado com um programa desenvolvido em MATLAB que resolve o problema adaptado de PINTO (1991) e CARVALHO (2005). A fim de ilustrar o desempenho dos métodos apresentou-se a solução de um problema 1-D com razão de mobilidade unitária e posteriormente aumentando em 10 vezes esta mesma razão. Além disso, também foram realizadas simulações com diferentes valores para a velocidade total de escoamento, obtendo-se os resultados esperados para tais mudanças. Como visto anteriormente, a formulação totalmente implícita apresentou resultados mais acurados e menos difusivos que o método totalmente explícito. Posteriormente, estas formulações serão estendidas para 2-D e 3-D, incluindo a discretização da equação da pressão. No futuro próximo também se pretende estudar e implementar formulações mais complexas num programa utilizando a linguagem do MATLAB, para simular o escoamento bifásico e imiscível de água e óleo em 2-D e 3-D utilizando um procedimento “Totalmente Implícito”, verificando sua robustez e acurácia para obter-se um simulador “*In House*”, que é o principal objetivo do subprojeto.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a todos os integrantes do grupo de pesquisa PADMEC pelas discussões frutíferas sobre o trabalho, e, ao PRH-26 e a FINEP, pelo apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

AZIZ, K.; SETTARI, A.; *Petroleum Reservoir Simulation*. Applied Science Publishers, LTD. London, 1979.

BUCKLEY, S.E., LEVERETT, M.C. (1942) Mechanisms of Fluid Displacement in Sands. *Transactions AIME*, 146:107-116.

CARVALHO, D. K. E.; LYRA, P. R. M.; WILLMERSDORF, R. B.; ARAÚJO, F. S., *An unstructured edge-based finite volume formulation for solving immiscible two-phase flows in porous media*. Communications in Numerical Methods in Engineering, CNME, vol. 21, p. 747-756, 2005.

CARVALHO, D. K. E.; WILLMERSDORF, R. B.; LYRA, P. R. M., *A node-centered finite volume formulation for the solution of two-phase flows in non-homogeneous porous media*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, IJNMF, v. 53, p. 1197-1219, 2007, (Identificação digital: DOI: 10.1002/fld1238).

CARVALHO, D. K. E., WILLMERSDORF, R. B., LYRA, P. R. M. *Some results on the accuracy of an edge-based finite volume formulation for the solution of elliptic problems in non-homogeneous and non-isotropic media*. IJNMF. (Identificação digital: DOI: 10.1002/fld.1948).

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y.; *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2006.

ERTEKIN, T.; ABBOU-KASSEM, J.H.; KING, G.R.; *Basic Applied Reservoir Simulation*. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers. Richardson, Texas, 2001.

MATHEWS, J.H.; FINK, K.D. *Numerical Methods Using MATLAB*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1999.

MATLAB ONLINE DOCUMENTATION. Ajuda on-line do MATLAB. Disponível em: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/>. Acesso em 29 de Janeiro de 2010.

PEACEMAN, D. W., In: *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. New York, Elsevier, 1977.

PINTO, A. C. C. *Esquemas de Alta Resolução para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios*. 206 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia do Petróleo, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, 1991.

VERMA, S. K.; AZIZ, K. *Three Dimensional Flexible Grids for Reservoir Simulation*. Fifth European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Leoben, Austria, p. 1-13, 1996.