

6º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

Equações Constitutivas Empregadas na Análise Estrutural Local de Tubos Flexíveis

AUTORES:

Yuri Perim

Roberto Ramos Jr.

INSTITUIÇÃO:

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 6º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 6º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 09 a 13 de outubro de 2011, em Florianópolis-SC. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 6ºPDPETRO.

Equações Constitutivas Empregadas na Análise Estrutural Local de Tubos Flexíveis

Abstract

A flexible riser is a rather complex structure composed of several concentric polymeric and steel armor layers which must withstand static and dynamic loads applied by the floating production vessel and by the ocean environment. Determining the equivalent axial, torsional and bending stiffness values of such structure is an important task for the global structural analysis, since it provides probable values that can be used in this kind of analysis to predict the load distribution along the line and allowing, thus, to estimate the expected life of the riser. Although such stiffness values may be provided by the manufacturer, it is quite desirable that they can be estimated by analytical models instead and, in order to achieve this task, a set of equations involving equilibrium, constitutive and displacement-deformation relations of each layer is needed.

The aim of this work is to present the deduction of some classical constitutive equations generally found in the technical literature dealing with the local structural analysis of the armor layers of flexible risers. These equations, as discussed above, are important not only for the local structural analysis of a flexible riser (i.e., for determining stresses in the armor layers, for instance) but also because they are fundamental for determining the equivalent stiffness values of the riser as a whole. The hypotheses, as well as the simplifications, assumed to derive these equations will be highlighted and a brief discussion about the validity of the resulting constitutive equations is made at the end of the work.

Introdução

No Brasil, 93% das reservas provadas de petróleo se encontram no mar, e estima-se que essas reservas aumentem em 50% devido à descoberta do pré-sal. A necessidade de produção a partir de reservas marinhas em águas profundas e ultra-profundas motiva numerosos estudos dos elementos e equipamentos utilizados na exploração de petróleo e de gás natural. Este trabalho trata da análise estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais, elementos responsáveis, respectivamente, pelo transporte do fluido e pelo controle/comunicação entre equipamentos submersos e de superfície.

O estudo dessas estruturas é geralmente dividido em duas partes, uma sobre análise global, que consiste na determinação das configurações de equilíbrio estático e dinâmico da estrutura, e outra sobre análise local, que consiste na determinação da distribuição dos esforços solicitantes nas diferentes camadas do tubo, como ilustrado na Figura 1.

Em geral, esses estudos são conduzidos separadamente, mas de forma conjugada, como numa via de duplo sentido: os resultados obtidos da análise local permitem a determinação dos valores de rigidez axial, flexional e torcional equivalentes da linha, os quais podem ser utilizados na análise global (caso se queira abrir mão das hipóteses de cabo ideal, ou seja, de cabo inextensível e perfeitamente flexível), e os resultados da análise global fornecem os esforços solicitantes distribuídos ao longo de toda a linha, os quais são utilizados para a realização da análise local (no que tange à determinação do nível de tensões nas camadas, da vida em fadiga, etc.).



Fig. 1: Exemplos da estrutura interna de um tubo flexível (a) e de um cabo umbilical (b).

É interessante notar, porém, que tanto a análise global quanto a análise local da linha compartilham de um mesmo conjunto de equações necessárias à solução dos respectivos problemas. Estas equações são: i) as equações diferenciais de equilíbrio da barra (a qual pode ser vista como a linha flexível em si, no caso da análise global, ou um tendão de uma armadura helicoidal, no caso da análise local), ii) relações cinemáticas (envolvendo, por exemplo, relações entre diversos parâmetros geométricos da linha, como componentes de curvatura e suas variações para cada configuração) e iii) equações constitutivas (relações entre esforços solicitantes atuantes na seção e as respectivas deformações associadas).

Em particular, no que tange ao uso de equações constitutivas para as armaduras helicoidais de tração de tubos flexíveis e cabos umbilicais, encontram-se na literatura técnica equações constitutivas clássicas sem muita discussão sobre a validade de seu emprego (ver, p. ex., Costello (1977, 1997), Custódio e Vaz (2002), Labrosse et al (2000), Leroy e Estrier (2001), Witz e Tan (1992, a-b)). Deve-se ressaltar que em muitas vezes, nem mesmo as hipóteses utilizadas na dedução dessas equações são evidenciadas. O objetivo deste trabalho reside em deduzir algumas destas equações constitutivas, a partir de hipóteses da teoria da elasticidade clássica, e posteriormente, com o uso de hipóteses simplificadoras, mostrar como as expressões constitutivas clássicas apresentadas na literatura podem ser obtidas. Por fim, de posse dos resultados obtidos e das hipóteses utilizadas, pretende-se discutir o uso dessas expressões.

Metodologia

Para a obtenção das equações constitutivas de uma barra (vista aqui como um tendão de uma armadura helicoidal de um tubo flexível), admitem-se, inicialmente, as seguintes hipóteses:

- i. O material da barra é homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico-linear;
- ii. A seção transversal é constante com relação ao comprimento de arco S_i , medido ao longo do eixo central da barra, o que significa que a barra deve estar sujeita a pequenas deformações (sem restrições, porém, quanto aos deslocamentos);
- iii. Seções planas na configuração inicial (não-deformada) da barra permanecem planas na configuração deformada;
- iv. Seções transversais permanecem ortogonais ao eixo da barra, quer na configuração inicial, quer na configuração deformada, o que significa ausência de distorções, ou seja, despreza-se a influência das tensões de cisalhamento;
- v. Tensões normais atuando em planos ortogonais ao da seção transversal são desprezadas.

Como podemos observar pelas figuras 2 e 3, o vetor posição de um ponto P qualquer ($\vec{r}_p$) pertencente a uma seção transversal genérica, em relação ao referencial inercial XYZ , é dado por:

$$\vec{r}_p = \vec{r}_C + x_p \vec{i} + y_p \vec{j} \quad (1)$$

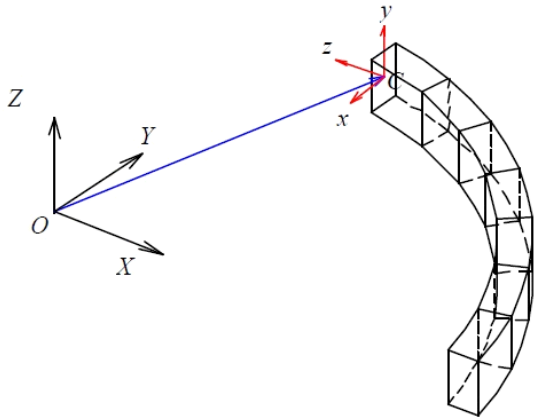


Fig. 2: Posição do centróide C de uma seção genérica em relação ao sistema inercial XYZ .

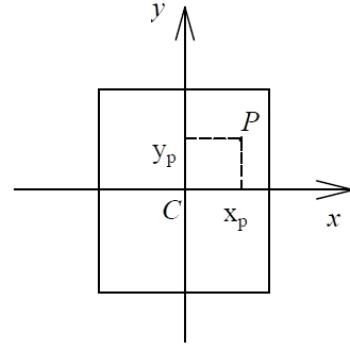


Fig. 3: Posição de um ponto P da seção em relação aos eixos principais de flexo-torção xyz .

E, como indica a figura 4, a posição do ponto P pode ser reescrita em termos de suas coordenadas em relação aos eixos principais de curvatura da curva formada pelos pontos do eixo central da barra numa configuração qualquer, formados pelo triedro de Frenet ($\vec{n}$, $\vec{b}$, $\vec{t}$).

$$\vec{r}_p = \vec{r}_C + (x_p \text{sen} f_i + y_p \text{cos} f_i) \vec{n} + (-x_p \text{cos} f_i + y_p \text{sen} f_i) \vec{b} \quad (2)$$

onde o índice i refere-se a uma dada configuração da barra, em que $i=1$ refere-se à configuração inicial, ou não deformada, e $i > 1$ refere-se às configurações deformadas subsequentes.

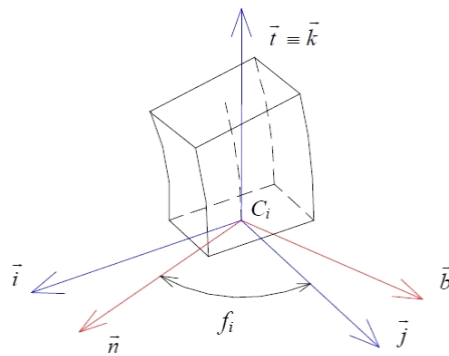


Fig. 4: Eixos principais de flexo-torção e eixos principais de curvatura.

Derivando a equação (2) em relação ao comprimento de arco (S_i), utilizando as relações de Frenet e as seguintes definições (ver, p.ex., Love (1944) ou Ramos Jr. (2001)):

$$\kappa_{xi} = -\chi_i \text{cos} f_i \quad (3)$$

$$\kappa_{yi} = \chi_i \text{sen} f_i \quad (4)$$

$$\kappa_{ti} = \tau_i + \frac{df_i}{dS_i} \quad (5)$$

obtem-se:

$$\frac{d\vec{r}_p}{dS_i} = (x_p \cos f_i - y_p \sin f_i) \kappa_{ti} \vec{n} + (x_p \sin f_i + y_p \cos f_i) \kappa_{ti} \vec{b} + (1 - x_p \kappa_{yi} + y_p \kappa_{xi}) \vec{t} \quad (6)$$

Tomando a norma dessa derivada, chega-se a:

$$\left\| \frac{d\vec{r}_p}{dS_i} \right\| = \sqrt{\kappa_{ti}^2 (x_p^2 + y_p^2) + (1 - x_p \kappa_{yi} + y_p \kappa_{xi})^2} \quad (7)$$

Admitindo que o produto das curvaturas pelas dimensões da seção transversal seja desprezível em comparação à unidade, pode-se linearizar a expressão acima através de sua expansão em série de Taylor, chegando-se à seguinte relação:

$$\|d\vec{r}_p\| = (1 - x_p \kappa_{yi} + y_p \kappa_{xi}) dS_i \quad (8)$$

O alongamento linear de uma fibra paralela ao eixo central da barra e que passa pelo ponto P pode ser calculado pela seguinte definição:

$$\varepsilon_{zp} = \frac{\|d\vec{r}_p\| - \|d\vec{r}_{p,1}\|}{\|d\vec{r}_{p,1}\|} \quad (9)$$

Substituindo-se $x_p = 0$ e $y_p = 0$ na equação (8), e utilizando a definição proposta na equação (9), obtém-se a equação (10).

$$\frac{dS_i}{dS_1} = 1 + \varepsilon_C \quad (10)$$

Em que ε_C é o alongamento do eixo central.

Substituindo-se as equações (8) e (10) na equação (9), obtém-se a equação (11).

$$\varepsilon_{zp} = \frac{\varepsilon_C - x_p [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] + y_p [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{xi} - \kappa_{x1}]}{1 - x_p \kappa_{y1} + y_p \kappa_{x1}} \quad (11)$$

Genericamente, podem-se decompor os esforços solicitantes em uma seção transversal da barra em seis; duas forças cortantes (Q_x, Q_y), uma força normal (N), dois momentos flettores (M_x, M_y) e um momento torçor (T). Esses esforços podem ser calculados por:

$$Q_x = \iint_A \tau_{zx} dA \quad (12)$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{zy} dA \quad (13)$$

$$N = \iint_A \sigma_z dA \quad (14)$$

$$M_x = \iint_A \sigma_z y_P dA \quad (15)$$

$$M_y = -\iint_A \sigma_z x_P dA \quad (16)$$

$$T = \iint_A (\tau_{zy} x_P - \tau_{zx} y_P) dA \quad (17)$$

Considerando-se as hipóteses (i) e (v), tem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_{zP} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \sigma_x = \sigma_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_z = E \cdot \varepsilon_{zP}$$

Substituindo esse resultado nas equações (14), (15) e (16), chega-se a:

$$N = EA^* \varepsilon_C - ES_y^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] + ES_x^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \quad (18)$$

$$M_x = ES_x^* \varepsilon_C - EI_{xy}^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] + EI_x^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \quad (19)$$

$$M_y = -ES_y^* \varepsilon_C + EI_y^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{yi} - \kappa_{y1}] - EI_{xy}^* [(1 + \varepsilon_C) \kappa_{xi} - \kappa_{x1}] \quad (20)$$

Em que se definem os parâmetros geométricos da seção transversal:

$$A^* = \iint_A \frac{1}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA; \quad S_x^* = \iint_A \frac{y_P}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA; \quad S_y^* = \iint_A \frac{x_P}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA;$$

$$I_{xy}^* = \iint_A \frac{x_P y_P}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA; \quad I_x^* = \iint_A \frac{y_P^2}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA; \quad I_y^* = \iint_A \frac{x_P^2}{1 - \kappa_{y1} x_P + \kappa_{x1} y_P} dA.$$

Considerando que na configuração não deformada as direções principais de flexão coincidem com as direções principais de curvatura, tem-se:

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \kappa_{x1} = 0 \\ \kappa_{y1} = \chi_1 \end{cases}$$

Apresentaremos, agora, dois estudos de caso associados a dois tipos de seção transversal usualmente encontradas na armaduras de tração de tubos flexíveis. As seções consideradas são: seção retangular (de dimensões $b \times t$) e a seção circular (de raio R), ambas maciças.

Para a seção retangular, obtêm-se após integração as expressões exatas:

$$A^* = \frac{b}{\chi_1} \ln \left(\frac{2 + \chi_1 t}{2 - \chi_1 t} \right); \quad S_x^* = 0; \quad S_y^* = \frac{b}{\chi_1^2} \ln \left(\frac{2 + \chi_1 t}{2 - \chi_1 t} \right) - \frac{bt}{\chi_1};$$

$$I_{xy}^* = 0; \quad I_x^* = \frac{b^3}{12\chi_1} \ln\left(\frac{2+\chi_1 t}{2-\chi_1 t}\right); \quad I_y^* = \frac{b}{\chi_1^3} \ln\left(\frac{2+\chi_1 t}{2-\chi_1 t}\right) - \frac{bt}{\chi_1^2}.$$

E para a seção circular, obtêm-se as seguintes expressões indicadas:

$$A^* = \frac{2}{\chi_1} \int_0^R \ln \left(\frac{1 + \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}}{1 - \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}} \right) dy; \quad S_x^* = 0; \quad S_y^* = \frac{2}{\chi_1^2} \int_0^R \ln \left(\frac{1 + \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}}{1 - \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}} \right) dy - \frac{\pi R^2}{\chi_1}$$

$$I_{xy}^* = 0; \quad I_x^* = \frac{2}{\chi_1} \int_0^R y_P^2 \ln \left(\frac{1 + \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}}{1 - \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}} \right) dy; \quad I_y^* = \frac{2}{\chi_1^3} \int_0^R \ln \left(\frac{1 + \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}}{1 - \chi_1 R \sqrt{1 - \left(\frac{y_P}{R}\right)^2}} \right) dy - \frac{\pi R^2}{\chi_1^2}$$

Se utilizarmos a aproximação:

$$f(\xi) = \ln\left(\frac{a+\xi}{a-\xi}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{(2j+1)a^{2j+1}} \xi^{2j+1}; \quad \xi \in (-a, a) \quad (21)$$

e considerarmos a hipótese de que o produto das curvaturas pelas dimensões da seção transversal é desprezível em comparação à unidade, pode-se, com algum trabalho algébrico, mostrar que os parâmetros geométricos definidos anteriormente se reduzem a formas mais simples. Para a seção retangular, a aproximação (21) foi aplicada diretamente às expressões finais, enquanto que para a seção circular, a aproximação (21) foi aplicada para o integrando das expressões indicadas. Tem-se, assim:

$$A^* = A; \quad S_x^* = S_x; \quad S_y^* = S_y; \quad I_{xy}^* = I_{xy}; \quad I_x^* = I_x; \quad I_y^* = I_y.$$

Em que A é a área da seção; S_x e S_y são os momentos estáticos de primeira ordem da seção em relação aos eixos x e y , respectivamente; I_{xy} é o produto de inércia da seção em relação aos eixos x e y ; e I_x e I_y são os momentos estáticos de segunda ordem da seção transversal em relação aos eixos x e y , respectivamente. Assim, as equações (18), (19) e (20) se reduzem à:

$$N = EA\varepsilon_C \quad (22)$$

$$M_x = EI_x(1 + \varepsilon_C)\kappa_{xi} \quad (23)$$

$$M_y = EI_y[(1 + \varepsilon_C)\kappa_{yi} - \chi_1] \quad (24)$$

Os erros percentuais introduzidos pelas simplificações são da ordem de grandeza do produto das curvaturas pelas dimensões da seção transversal. Sendo assim, o produto do alongamento pelas curvaturas pode ser desprezado, uma vez que esse produto é menor do que o erro percentual, chegando-se, assim, às seguintes expressões clássicas:

$$N = EA\varepsilon_C \quad (25)$$

$$M_x = EI_x \kappa_{xi} \quad (26)$$

$$M_y = EI_y (\kappa_{yi} - \chi_1) \quad (27)$$

Essas são as expressões em geral utilizadas, explícita ou implicitamente, em trabalhos sobre análise local de risers flexíveis e estruturas similares (ver, p.ex., Leroy e Estrier (2001), Ramos e Pesce (2004) e Witz e Tan (1992, a-b)). Nota-se, porém, que na dedução das mesmas existem diversas hipóteses e simplificações, o que restringe as situações em que elas são aplicáveis. É interessante observar ainda que outras formas interessantes de modelagem das camadas helicoidais, através de analogias com o comportamento de cilindros anisotrópicos, também podem ser encontradas na literatura (ver, p.ex., Crossley et al (2003)).

Resultados e Discussão

Para a obtenção das expressões clássicas das equações constitutivas empregadas na análise de camadas helicoidais de tubos flexíveis, várias hipóteses acerca do comportamento do material e de relações geométricas foram adotadas e algumas simplificações foram impostas. Essas simplificações são responsáveis pela introdução de erros na determinação dos parâmetros geométricos e conseqüentemente no cálculo das relações entre esforços solicitantes e curvaturas. Esses erros são considerados aceitáveis, uma vez que, em termos percentuais, são da ordem do produto das curvaturas do eixo central da barra pelas dimensões da seção transversal (no caso dos tendões das armaduras helicoidais de tubos flexíveis este erro é, em geral, inferior a 1%).

As hipóteses de (i) a (iv) adotadas são hipóteses usuais da teoria da elasticidade clássica. Porém, a hipótese (v), que admite que as tensões normais atuando em planos ortogonais ao da seção transversal podem ser desprezadas, pode não ser razoável para o caso das armaduras de tração presentes em tubos flexíveis, uma vez que as pressões de contato entre as armaduras de tração e suas camadas adjacentes podem ser significativas em determinadas aplicações.

Conclusões

Conclui-se que as equações constitutivas clássicas devem ser empregadas cuidadosamente na análise local de tubos flexíveis. Para a obtenção dessas equações, é introduzida uma hipótese forte que não reflete necessariamente a realidade, a saber: a hipótese de que as tensões normais atuando em planos ortogonais ao da seção transversal são desprezíveis (hipótese (v)). As pressões externa e interna podem ser bastante elevadas resultando em tensões normais que devem ser consideradas na obtenção das equações constitutivas. Deve-se ressaltar, naturalmente, que as outras hipóteses admitidas também devem ser sempre lembradas pelo projetista para que, ao final da análise, seja verificada a consistência na aplicação destas equações.

Agradecimentos

Ao Programa de Ensino Tutorial (PET-Mecânica) e seu professor responsável, Prof. Dr. Edilson Hiroshi Tamai, pelo incentivo constante à iniciação científica.

À Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) e, em particular, ao PRH-19 pela oportunidade oferecida para a realização deste trabalho.

Referências Bibliográficas

Costello, G.A. Large deflections of helical spring due to bending. **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, 103, p. 479-487, 1977.

Costello, G.A. **Theory of wire rope**. 2nd ed. Springer-Verlag New York, Inc. 1997. 122p.

Crossley, J.A.; Spencer, A.J.M.; England, A.H. Analytical solutions for bending and flexure of helically reinforced cylinders. **International Journal of Solids and Structures**, v.40, p. 777-806, 2003.

Custódio, A.B.; Vaz, M.A. A nonlinear formulation for the axisymmetric response of umbilical cables and flexible pipes. **Applied Ocean Research**, v.24, p. 21-29, 2002.

Labrosse, M.; Nawroski, A.; Conway, T. Frictional dissipation in axially loaded simple straight strands. **Journal of Engineering Mechanics**, p. 641-646, 2000.

Leroy, J.-M.; Estrier, P. Calculation of stresses and slips in helical layers of dynamically bent flexible pipes. **Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP**, v.56, p.545-554, 2001.

Love, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4. ed. New York: Dover Publications, 1944, 643 p.

Ramos Jr., R. **Modelos analíticos no estudo do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais**. 367f. Tese de Doutorado. Programa de Pós- Graduação em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001. (in Portuguese).

Ramos Jr., R.; Pesce, C.P. A consistent analytical model to predict the structural behavior of flexible risers subjected to combined loads. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v.126, p. 141-146, 2004.

Witz, J.; Tan, Z. On the axial-torsional structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, v.5, p.205-227, 1992.

Witz, J.; Tan, Z. On the flexural structural behaviour of flexible pipes, umbilicals and marine cables. **Marine Structures**, v.5, p.229-249, 1992.