

6º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

Utilização de uma Formulação do Método dos Volumes Finitos Não-Linear para a Solução de Escoamentos Bifásicos em 2-D em Meios Porosos Homogêneos e Anisotrópicos

AUTORES:

Luiz Eduardo Silva Queiroz¹; Darlan Karlo Elisiário de Carvalho²; Paulo Roberto Maciel Lyra²

INSTITUIÇÃO:

¹Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco (DF-UFPE); ²Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC-UFPE)

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 6º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás- 6º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás-ABPG, no período de 09 a 13 de outubro de 2011, em Florianópolis-SC. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 6ºPDPETRO.

UTILIZAÇÃO DE UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS NÃO-LINEAR PARA A SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM 2-D EM MEIOS POROSOS HOMOGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS

Abstract

The modeling and simulation of two-phase flows of oil and water in non-isotropic porous media is an area of intensive research. The traditional numerical formulations used to discretize the PDEs that result from such modeling should ideally be: locally conservative, second order accurate for smooth solutions, produce sparse coefficient matrices and monotone solutions or, at least, positive solutions in the presence of strong anisotropy. In fact, this last requirement is not fulfilled by the linear solution methods such as the classical finite difference (FD) or the Galerkin finite element (GFE). In the present paper, we present a cell-centered finite volume formulation to model the 2-D incompressible and immiscible two-phase flow of water and oil in homogeneous and non-isotropic porous media using the classical segregated “Implicit Pressure Explicit Saturation (IMPES)” procedure. In the IMPES approach, initially, the pressure equation is solved implicitly from an initial saturation distribution; then, velocities/fluxes are computed explicitly from the pressure field, and, finally, the saturation equation is solved explicitly. This saturation field is then used to re-compute the pressure field and the process is repeated until the end of the simulation is reached. The solution of the pressure equation is performed using a non-linear finite volume method (NLFV) of Le Portier with the modifications proposed by Lipnikov and coauthors. The scheme is based on a non-linear two-point flux approximation, which has been proven to be monotone, in the sense of preserving positive solutions, even for highly distorted meshes and strong anisotropic media, producing robust solutions for rough meshes. The method is based on the use of auxiliary nodal unknowns which are interpolated from the cell centered values. If a nodal linear interpolation is used to build the cell centered approximations, the method is also second order accurate for homogeneous media. For the discretization of the hyperbolic non-linear saturation equation, we have used a simple cell-centered first order upwind method. In order to validate the proposed methodology we solve some representative model problems. The obtained results are quite promising, indicating the potential of the adopted formulation for the simulation of two-phase flows in strongly anisotropic porous media.

Introdução

As equações que descrevem o transporte de contaminantes ou o escoamento bifásico de óleo e água em reservatórios de petróleo possuem um operador elíptico com um coeficiente de difusão, que é, em geral, descontínuo e representado por um tensor com elevada razão de anisotropia ($K_1 \gg K_2$). Este fato sugere o uso de formulações conservativas de volumes finitos, com expressões para o fluxo que representam adequadamente a heterogeneidade e anisotropia típicas de reservatórios de óleo e aquíferos (CARVALHO et al., 2005). A simulação numérica desses processos exige, não só modelos físicos mais sofisticados, mas também métodos de discretização mais precisos e confiáveis. Na presença de meios porosos com razão de anisotropia elevada, mesmo os métodos numéricos mais recentes e robustos, como o Método de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo com Múltiplos Pontos (MVFMP) e o Método das Diferenças Finitas Miméticas (MDFM) (EDWARDS, 2009) podem produzir soluções não-monótonas com oscilações espúrias no campo de pressões podendo gerar gás “fictício” nas regiões do reservatório em que a pressão cai erroneamente abaixo do ponto de bolha, além destes campos de pressão estarem associados a velocidades de Darcy não-físicas (LIPNIKOV et al. 2007).

Tendo em vista o exposto anteriormente, de acordo com LIPNIKOV et al. (2007), o desenvolvimento de um esquema de discretização, particularmente aqueles utilizados na modelagem de problemas que envolvem leis de conservação, deveria ser baseado tanto em critérios de caráter prático como em critérios físicos, que podem ser sumarizados, como: conservação local; produção de soluções monótonas (em consonância com a solução analítica); robustez no caso do uso de malhas não-estruturadas e/ou muito distorcidas; permitir tensores de difusão arbitrários; resultar em sistemas esparsos, com um número mínimo de entradas diferentes de zero; ter maior precisão do que a de primeira ordem para soluções suaves.

Recentemente, uma classe de métodos de volumes finitos não lineares que garantem monotonicidade (no sentido de preservar a positividade) foi proposto na literatura (LE POTIER, 2005; LIPNIKOV et al., 2007; LE POTIER, 2009), mesmo na presença de tensores descontínuos com razões de anisotropia elevada.

No presente trabalho, implementamos uma formulação do método dos volumes finitos para a discretização das equações que surgem ao modelarmos o problema do escoamento bifásico de água e óleo em meios porosos rígidos ao utilizarmos um procedimento segregado do tipo “Implicit Pressure Explicit Saturation” (IMPES) em que o escoamento, no caso incompressível, é descrito por uma equação elíptica de pressão e uma equação hiperbólica de saturação. De maneira resumida podemos dizer que, na metodologia IMPES, partindo de um campo de saturações, calculamos implicitamente o campo de pressões, em seguida calculamos a velocidade que é utilizada como dado de entrada para o cálculo explícito do campo de saturações. Para a discretização da equação de pressão, utilizamos o Método de Volumes Finitos Não-Linear (MVFNL), originalmente proposto por LE POTIER (2005), com as modificações propostas por LIPNIKOV et al. (2007). Este método fornece soluções monótonas, no sentido de garantia da positividade das soluções numéricas, mesmo no caso de malhas não ortogonais muito distorcidas ou no caso de tensores de difusão (i.e., permeabilidade) com razão de anisotropia elevada (i.e., $K_1/K_2 \gg 1$). Para a discretização da equação quase linear de saturação utilizamos um simples método de ponderação à montante de 1ª ordem (first order upwind). A discretização temporal é feita por meio do método de Euler explícito. A fim de validarmos a metodologia empregada, resolvemos um o problema clássico de 1/4 de cinco poços proposto por DURLOFSKY (1993) e comparamos os resultados com os apresentados em CARVALHO (2005).

Metodologia

1. Formulação Matemática

Nesta seção, descrevemos brevemente as equações que governam o escoamento bifásico incompressível e imiscível água-óleo num meio poroso rígido. Este modelo é obtido combinando-se a Lei de Darcy e a conservação de massa para cada fase (CARVALHO et al., 2007, DURLOFSKY, 1993).

Primeiro, assumimos que a velocidade de cada fase obedece à Lei de Darcy, que, ignorando os efeitos gravitacionais, pode ser escrita para cada fase como $\vec{v}_i = -\lambda_i \nabla P_i$, onde $\lambda_i = K (k_i/\mu_i) = K \lambda_i$ é a mobilidade da fase i , K é o tensor de permeabilidade absoluta, k_i é a permeabilidade relativa e μ_i é a viscosidade da fase. Também desconsideramos os efeitos de capilaridade. Além disso, a conservação de massa para cada fase i é escrita como:

$$-\nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i = \frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} \quad (1)$$

Na Eq. (1), ϕ é a porosidade, q_i é o termo de fonte ou sumidouro, ρ_i é a densidade da fase e S_i a saturação da fase i , que representa a porcentagem do volume poroso ocupado por esta fase. Assim, usando o fato de que $S_o + S_w = 1$, e a Lei de Darcy para cada fase, após algumas manipulações, chegamos à seguinte equação de pressão, onde explicitamos suas condições de contorno:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q & \text{em } \Omega \\ p = g_D & , \text{ em } \Gamma_D \\ -\lambda \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = g_N & , \text{ em } \Gamma_N \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\lambda \vec{\nabla} p \quad (2)$$

onde $\lambda = \lambda_o + \lambda_w$ é a mobilidade total, $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_w = -\lambda \vec{\nabla} p$ é a velocidade total e $Q = Q_o + Q_w$, com $Q = (q_i / \rho_i)$ é a taxa de injeção ou produção. O nosso domínio Ω , com fronteira $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ está sob condições de Dirichlet ($\Gamma_D \neq \emptyset$) e de Neumann (Γ_N), respectivamente. Introduzindo o fluxo fracional da fase i , $f_i = \lambda_i / (\lambda_o + \lambda_w)$, obtemos a equação (hiperbólica) para a saturação da água:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) = Q_w \quad (3)$$

O termo $\vec{F}_w = f_w \vec{v}$ é uma função que depende da saturação da água. Desta forma, os campos de pressão e saturação são conectados pela velocidade total $\vec{v}$.

2. Formulação Numérica

2.1 Equação da Pressão

A seguir, descrevemos o método de volumes finitos utilizado na discretização das Eqs. (2). Vamos assumir que o domínio poligonal Ω é subdividido em triângulos. Integrando (2) num volume de controle T e usando o Teorema da Divergência de Gauss, tem-se:

$$\int_T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_T = \int_{\partial T} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_T = \int_T f d\Omega_T \quad \Rightarrow \quad \sum_{e \in \partial T} \vec{v}_e \cdot \vec{n}_e = \int_T f d\Omega_T \quad (4)$$

onde $\vec{n}$ denota o vetor unitário normal externo a ∂T . Seja e uma aresta de T e $\vec{n}_e$ o vetor normal correspondente. Assumimos $|\vec{n}_e| = |e|$, onde $|e|$ é o comprimento da aresta e $\vec{v}_e = (1/|e|) \int_e \vec{v} d\Gamma_T$ é o “fluxo médio” para a aresta e . Considerando P o vetor das pressões discretas P_T em cada elemento T . Se dois elementos T_+ e T_- tem uma aresta e em comum, com pressões P_+ e P_- respectivamente, a aproximação para o fluxo é dada por:

$$\vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = A_e^+(P) P_+ - A_e^-(P) P_- \quad (5)$$

onde A_e^+ e A_e^- são coeficientes a serem determinados e que dependem das pressão, e o método é não-linear.

Nesta formulação, a pressão contínua será aproximada pela pressão discreta num certo *ponto de colocação* no interior do elemento. Tal ponto de colocação é definido, por:

$$x_T = \sum_{i=1}^3 v_i \lambda_i, \quad \lambda_i = \frac{|\vec{n}_{\alpha(i)}|_K}{\sum_{j=1}^3 |\vec{n}_{\alpha(j)}|_K} \quad (6)$$

onde v_1 , v_2 e v_3 são os vértices do triângulo, $|\vec{n}|_K = (\tilde{K}\vec{n} \cdot \vec{n})^{1/2}$ é o comprimento do vetor normal na métrica $\tilde{K}$ e $\alpha(i)$ denota a aresta oposta ao vértice v_i .

Os coeficientes A_e^+ e A_e^- na Eq. (5) dependem das pressões nos nós dos elementos, que devem ser aproximadas usando os graus de liberdade originais, ou seja, as pressões nos pontos de colocação. Escolhemos um método de interpolação linear onde usamos três pontos de colocação próximos ao vértice v_i , cuja pressão P_i se quer interpolar e que formam um triângulo imaginário $\tilde{T}$ contendo v_i . Denotamos esses pontos por x_{T_j} , $j=1,2,3$. A interpolação para tal triângulo dá uma aproximação de 2ª ordem (i.e. linear) para P_i :

$$P(v_i) = \sum_{j=1}^3 P(x_{T_j}) \tilde{\lambda}_j \quad (7)$$

onde $\tilde{\lambda}_j$, $j=1,2,3$, são as coordenadas baricêntricas do ponto v_i no triângulo $\tilde{T}$. Note que $0 \leq \tilde{\lambda}_j \leq 1$. Tal método de interpolação não produz solução linear por partes (“piecewise linear”).

Precisamos impor as condições de contorno. Para arestas sob condição de Neumann $e \in \Gamma_N$, o fluxo na aresta será $\vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = \bar{g}_N |\vec{n}_e|$, onde $\bar{g}_N$ é o valor da condição de contorno na aresta e .

Agora, para arestas sob condição de Dirichlet $e \in \Gamma_D$, existe um elemento T_e tal que $T_e \cap \Gamma_D = e$. Definimos o elemento T^+ com vértices x_+ , v_1 e v_2 , onde x_+ é o ponto de colocação de T_e e v_1 e v_2 são os vertices de e . Como v_1 e v_2 são extremidades de arestas de Dirichlet, $P_i = g_D(v_i)$. A aproximação linear para o fluxo através da aresta e se torna $\vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = A_e^+ P_+ - A_e^-$.

Para cada elemento T , a equação (4) é escrita, como:

$$\sum_{e \in \partial T} \chi(T, e) \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = \int_T f d\Omega_T \quad (8)$$

onde $\chi(T, e)$ é 1 ou -1 dependendo da orientação do vetor normal $\vec{n}_e$. Substituindo a Eq. (5) em (8) com os coeficientes não-negativos A_e^+ e A_e^- , teremos um sistema não-linear $A(P)P = F$. A montagem da matriz global $A(P)$ é feita através de matrizes (2 x 2) para as arestas internas e matrizes (1 x 1) para arestas de Dirichlet. O lado direito (“right hand side”) F é dado pelo termo de fonte ou sumidouro e pelas condições de contorno:

$$F_T = \int_T f d\Omega_T - \sum_{e \in \Gamma_D} A_e^- - \sum_{e \in \Gamma_N} \int e g_N d\Gamma_T \quad (9)$$

Para $f \geq 0$, $g_D \geq 0$ e $g_N \geq 0$ as componentes do vetor F são positivas.

No presente trabalho, seguindo LIPNIKOV et al. (2007), usamos iterações de Picard para resolver o problema não-linear. Este método é descrito brevemente a seguir.

Tome um valor pequeno $\varepsilon_{non} > 0$ e o vetor inicial P^0 com entradas positivas e repita, para $k = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$:

1. Resolva $\left[A(P^{k-1}) \right] P^k = F$;
2. Pare se $\left\| A(P^k) P^k - F \right\| \leq \varepsilon_{non} \left\| A(P^{k-1}) P^k - F \right\|$.

2.2 Equação de Saturação

Usando o Método dos Volumes Finitos, integrando a Eq. (3) no espaço, e usando a fórmula de Green, escrevemos:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega + \int_{\Gamma=\partial \Omega} \vec{F}_w(S_w) \cdot \vec{n} \partial \Gamma = \int_{\Omega} Q_w \partial \Omega \quad (10)$$

Desenvolvendo a Eq. (10) para um elemento T_i e usando $\vec{F}_w = f_w \vec{v}$, temos:

$$\phi \frac{\partial S_{w(i)}}{\partial t} \cdot \forall + \sum_{e \in \partial T_i} f_w \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = Q_w \cdot \forall \quad (11)$$

onde $\forall$ é o volume (ou área, no caso bidimensional) de controle do elemento T_i . Para a discretização temporal, utilizamos a aproximação tipo Euler avançado:

$$\phi \frac{\partial S_{w(i)}}{\partial t} \cdot \forall = \phi \frac{S_{w(i)}^{n+1} - S_{w(i)}^n}{\Delta t} \cdot \forall = Q_w \cdot \forall - \sum_{e \in \partial T} f_w \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e \quad (12)$$

Na Eq. (12), $S_{w(i)}^n$ e $S_{w(i)}^{n+1}$ são as saturações de água no elemento i nos instantes “ n ” e “ $n+1$ ”, respectivamente.

Note que, neste método, o termo de vazão, $\vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e$, é calculado para uma aresta, enquanto que o fluxo fracional f_w se define para um elemento. Deste modo, para certa aresta e , interseção de dois elementos T_+ e T_- , temos que $\vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = A_e^+ P_+ - A_e^- P_-$ e utilizando a aproximação do Método de Ponderação à Montante de 1ª Ordem (First Order Upwind), resulta em:

$$f_{w,e} \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e = \begin{cases} f_{w,e}(T_-) \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e, & \text{se } \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e > 0 \\ f_{w,e}(T_+) \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e, & \text{se } \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente, as saturações em cada elemento a cada passo de tempo são calculadas por:

$$S_{w(i)}^{n+1} = S_{w(i)}^n + \frac{\Delta t}{\forall \phi} \cdot \left[Q_w \cdot \forall - \sum_{e \in \partial T} f_{w,e} \cdot \vec{v}_e^h \cdot \vec{n}_e \right] \quad (14)$$

Resultados e Discussão

Para verificação do método, apresentamos um exemplo que é uma versão adimensionalizada do clássico problema de 1/4 de cinco poços, no qual um poço injetor de água está rodeado por quatro poços produtores de óleo. Para este problema, adaptado de DURLOFSKY (1993), as saturações residuais de água e óleo são $S_{rw} = S_{ro} = 0.0$ e o meio poroso é considerado homogêneo e isotrópico com $K = I$ (matriz identidade) através de todo o domínio. Assumimos ainda que a porosidade é

constante sendo que seu valor real não é relevante já que a utilizamos apenas para adimensionalizar o tempo. As viscosidades da água e do óleo são tais que razão entre as viscosidades é $M = (\mu_o / \mu_w) = 4.0$. As condições de contorno são $S_i = 1.0$ no poço injetor e as pressões nos cantos diagonais inferior esquerdo e superior direito são $P_{ie} = 1.0$ e $P_{sd} = -1.0$; além disso, os quatro lados do domínio estão sob condição de Neumann com $g_N = 0$. No presente trabalho usamos uma malha com (16×16) subdivisões, ou seja, 512 elementos triangulares, conforme a figura 1. A figura 2 apresenta o campo de pressões calculado para o instante inicial obtido para esta malha. Nas Figuras 3 e 4 apresentamos, respectivamente, o volume de óleo acumulado e o óleo recuperado, normalizado pelo volume total injetado. DURLOFSKY (1993) resolveu este problema utilizando uma formulação híbrida, em que o problema pressão-velocidade foi resolvido a partir do método dos elementos finitos mistos e a equação de saturação foi resolvida utilizando um método de volumes finitos de ordem mais alta. Em todos os resultados abaixo, CARVALHO (2005) utilizou um método dos volumes finitos por arestas onde a equação de saturação foi resolvida pelo método de alta ordem “Monotonic Upstream for Conservation Laws” (MUSCL). Nas figuras mostradas abaixo, notamos que os resultados que obtivemos concordam satisfatoriamente com os obtidos por DURLOFSKY(1993) e CARVALHO (2005).

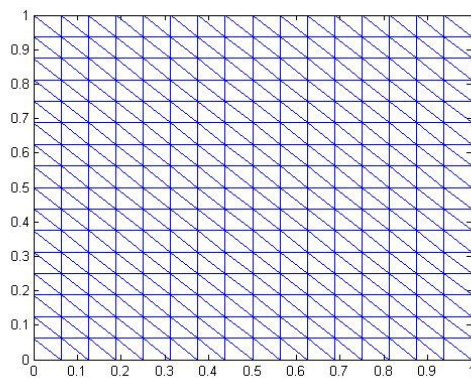
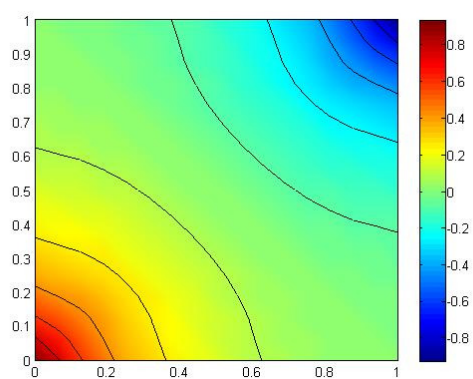
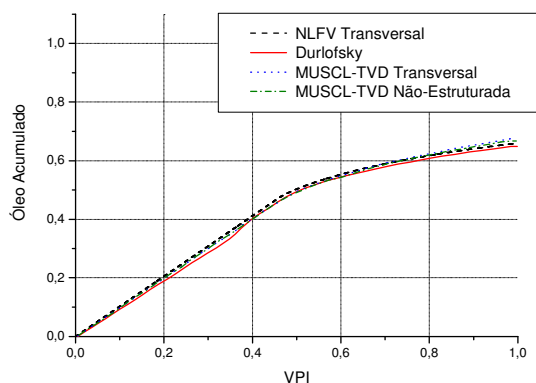
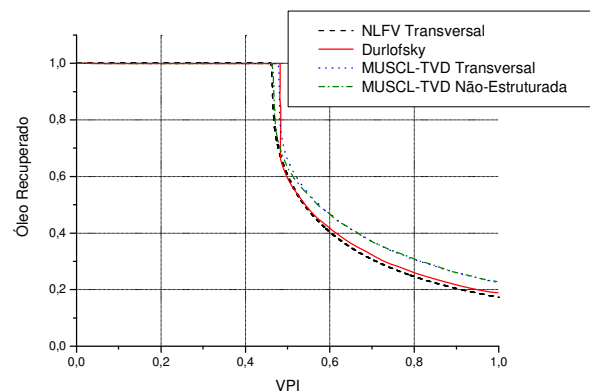


Figura 1 – Malha

Figura 2 – Campo de pressões em $t = 0$ Figura 3 – Óleo acumulado para $M = 4.0$.Figura 4 – Óleo recuperado para $M = 4.0$.

Fizemos também uma pequena modificação no problema de DURLOFSKY (1993) utilizando $M = (\mu_o / \mu_w) = 40.0$. Todos os outros dados são mantidos iguais aos do problema anterior. Nas Figuras 5 e 6 apresentamos, respectivamente, as curvas de óleo acumulado e de óleo recuperado. Mesmo neste caso bem mais severo, com $M = 40.0$, a solução é visualmente similar tanto do ponto de vista da quantidade de óleo acumulada quanto da fração de óleo recuperada.

Conclusões

No presente artigo, descrevemos uma formulação de volumes finitos não-linear para a solução do escoamento imiscível óleo-água em meios porosos homogêneos e anisotrópicos. Esta formulação é

capaz de tratar satisfatoriamente coeficientes com anisotropia elevada. Foi apresentado um exemplo para comprovar a eficiência do método. Atualmente, estamos investigando a acurácia da formulação proposta para meios porosos heterogêneos. No futuro próximo, pretendemos utilizar um método de discretização de ordem mais alta para a equação de saturação além de investigarmos formas de interpolação mais adequadas para problemas que envolvam meios heterogêneos.

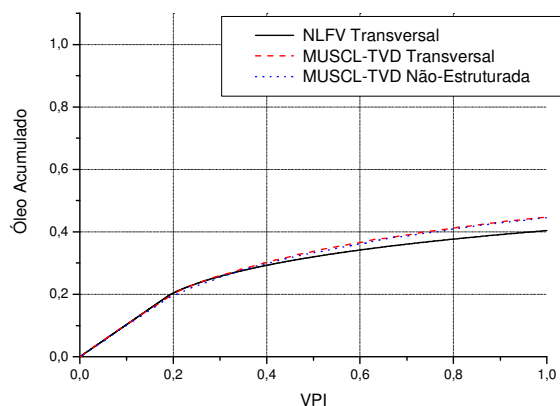


Figura 5 – Óleo acumulado para $M = 40.0$.

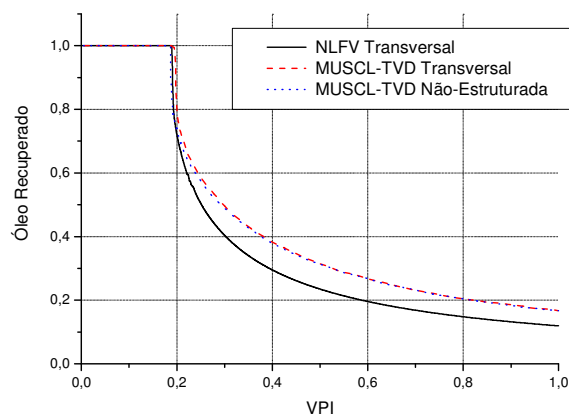


Figura 6 – Óleo recuperado para $M = 40.0$.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), pelo apoio financeiro.

Referências Bibliográficas

- CARVALHO, D. K. E. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.
- CARVALHO, D. K. E., WILLMERSDORF, R. B., LYRA, P. R. M. *A node centred finite volume formulation for the solution of two-phase flows in non-homogeneous porous media*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 53, p. 1197-1219, 2007.
- DURLOFSKY, L. J. *A Triangle Based Mixed Finite Element-Finite Volume Technique for Modeling Two Phase Flow Through Porous Media*. Journal of Computational Physics, v. 105, p. 252-266, 1993.
- EDWARDS, M. G., ZHENG H. *A quasi-positive family of continuous Darcy-flux finite-volume schemes with full pressure support* Journal of Computational Physics, v. 227, p.9333-9364, 2009.
- LE POTIER, C. *A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators*, International Journal on Finite Volumes, v.6, nº2, 2009.
- LE POTIER, C, *Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés*, Comptes Rendus Mathématique, v. 347, p. 105-110, 2009.
- LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; SVYASTSKIY, D.; VASSILEVSKI, YU., *Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes*. Journal of Computational Physics, v. 227, p. 492-512, 2007.