

8º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

OPERADORES CONVOLUCIONAIS APLICADO A EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

AUTORES:

Bruno de Souza Silva¹,
Carlos Henrique Santos Barbosa^{2*},
Josias José da Silva²,
Luiz Landau¹

INSTITUIÇÃO:

1. UFRJ/COPPE/LAMCE/Lab2M – Laboratório Multidisciplinar de Modelagem
2. PETREC – Petroleum Research and Technology

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 8º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás - 8º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás - ABPG, no período de 20 a 22 de outubro de 2015, em Curitiba/PR. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 8º PDPETRO.

OPERADORES CONVOLUCIONAIS APLICADO A EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

Abstract

The Finite Difference Method (FDM) is very popular in acoustic modeling wave. However, the necessity of using a very fine mesh or a small sampling interval to improve the accuracy may increase the computational cost. An alternative used in the literature is to use optimized operators combined with higher orders FDM to infer better accuracy without increasing the cost. However, to achieve such efficiency, it is necessary to generate the parameters and dispersion stability discretization for each order, as they vary according to the order and the coefficients Finite Difference (FD). We present a strategy to generate the dispersion and stability of parameters used in modeling acoustic wave employing the high orders of FDM. The application of this strategy combined with optimized operators provided a more accurate modeling without changing the computational cost. For the sixteenth order to expand the optimized Finite Difference Method was reached the number of points per wavelength equal to 2.3, which provided in relation to conventional fourth order, a reduction in the processing time approximately 42 % accompanied by a reduction in demand for next memory 80%.

Introdução

Na propagação de ondas em meios geologicamente complexos uma ferramenta que tem sido indispensável é a modelagem sísmica (Chu e Stoffa, 2012). O problema da simulação da propagação de ondas sísmicas corresponde em resolver equações diferenciais que descrevem a propagação no interior da Terra.

Dentre os muitos métodos numéricos propostos para resolver tais equações diferenciais, o Método de Diferenças Finitas (MDF) é o mais popular, por ser de fácil implementação e também um dos mais bem sucedidos por ser ideal para modelos complexos, devido a sua eficiência (Alford *et al.*, 1974; Virieux, 1986, Chu e Stoffa, 2012). Tal método se baseia nas aproximações das derivadas das equações diferenciais através da substituição destas por aproximações discretas.

Em geral, para fazer a aproximação das derivadas, emprega-se uma expansão truncada da série de Taylor, e posteriormente obtêm-se os coeficientes referentes a cada ponto do *stencil* da fórmula da diferenças finitas (operador). Chu e Stoffa (2012) encontraram duas famílias de *Binominal Window* que podem ser utilizadas para derivar operadores de DF analiticamente. Com uma pequena alteração, esta janela também pode ser utilizada para derivar operadores com maior propriedade de dispersão. Porém, a utilização desta função janela envolve o controle de um parâmetro que é difícil de determinar. Outro fato é que tal função janela necessitam ser manuseada com cautela pois pode afetar substancialmente o resultado final (Zhang e Yao, 2013).

Uma saída para contornar esse problema é utilizar técnicas de otimização para minimizar o erro de dispersão gerando operadores otimizados (Chu e Soffa, 2012). A análise de dispersão e a modelagem numérica demonstraram que esse *stencil* teve maior precisão que o de diferenças finitas, quando o mesmo número de pontos na malha é utilizado no cálculo das derivadas espaciais. Buscando melhorar tal precisão, Zhang e Yao (2013) reduziram as dispersões numéricas do MDF na presença de altas frequências. Os coeficientes do operador de DF foram otimizados através da maximização da convergência do número de onda, dado um limite de erro. Dentro deste contexto, este trabalho tem como objetivo apresentar a precisão obtida com a aplicação dos coeficientes otimizados na equação acústica da onda.

Operador de Diferenças Finitas

O operador de DF convencional para derivada segunda espacial para a função $f(x)$ pode ser escrito em função do truncamento da série de Taylor em torno do ponto $x=0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} a_n \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] f(\Delta x) \quad (1)$$

onde Δx é o intervalo de amostragem no eixo x , N é a ordem de discretização e a_n são os coeficientes de definidos pela janela binominal:

$$a_n = \frac{\binom{N}{\frac{N}{2}+n}}{\binom{N}{\frac{N}{2}}}, \quad (2)$$

Uma forma de reduzir a dispersão numérica, é a adoção de funções janelas para gerar coeficientes otimizados para a Equação 1. Chu e Stoffa (2012) propuseram uma janela w_n para obter coeficientes de DF otimizado, que podem ser gerados da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} w_n \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] f(\Delta x), \quad (3)$$

onde é gerado a partir da seguinte função janela otimizada

$$w_n = \frac{\binom{N+M}{\frac{N+M}{2}+n}}{\binom{N+M}{\frac{N+M}{2}}}, \quad (4)$$

Utilizando uma forma final para o operador de DF otimizado, pode-se combinar a função janela w_n com todas as partes da Equação 3 da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n f(\Delta x), \quad (5)$$

onde é a forma final dos coeficientes a serem utilizados na implementação, e pode ser definido como:

Coeficientes Convencional - Taylor:

$$c_n = a_n \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] \quad (6a)$$

Coeficientes Otimizado - *Binominal Window*:

$$c_n = w_n \left[-\frac{2}{n^2} \cos(n\pi) \right] \quad (6b)$$

$$c_0 = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_{-n} + c_n \quad (6c)$$

O parâmetro M dessa função janela é difícil de determinar e ao mesmo tempo necessita de ser manuseado com cautela, pois pode afetar significativamente o resultado final. Zhang & Yao (2013) determinaram os coeficientes c_n utilizando um esquema de otimização que utiliza a maximização da convergência do número de onda, dado uma limitação do erro. Foi examinado o pico do erro entre o operador otimizado no domínio do número de onda e no domínio do número de onda analítico. Para gerar os coeficientes otimizados, foi usado o algoritmo de minimização *Simulated Annealing* (SA). Tais coeficientes são utilizados neste trabalho.

Análise do Erro Absoluto

Com intuito de avaliar a melhoria na propriedade de dispersão, foi construído o gráfico da análise do erro espectral da derivada segunda para diferentes ordens de precisão (Figura 1). Para isso utilizou-se a fórmula do erro espectral absoluto, escrita em função do número de onda normalizado pelo número de onda de Nyquist, ou seja:

$$Erro\left(\frac{K_x}{K_{xn}}\right) = -\left[c_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2} c_n \cos\left(\frac{k_x}{k_{xn}} n\pi\right)\right] - \left(\frac{k_x}{k_{xn}} \pi\right) \quad (7)$$

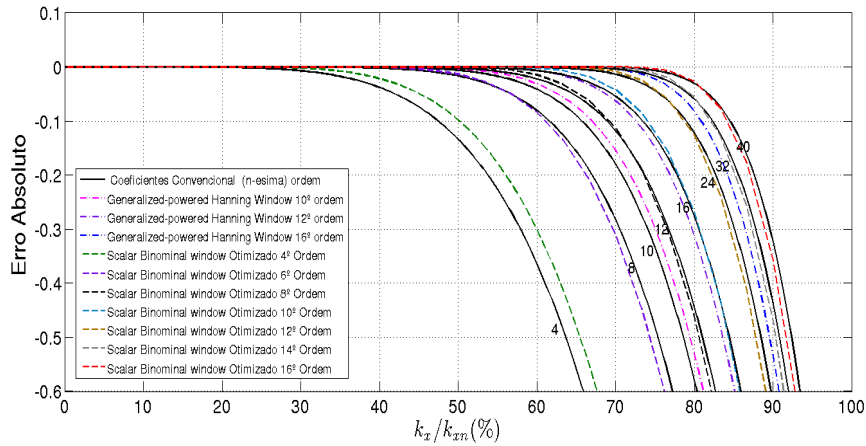


Figura 1- Análise do Erro Espectral para o Operador da Derivada Espacial de Segunda Ordem.

Equação da Onda em Meios Acústicos

A equação acústica da onda considerando meios com densidade constante, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C(x,z)^2} \frac{\partial^2 P(x,z,t)}{\partial t^2} + f(t)\delta(x - x_f)\delta(z - z_f), \quad (8)$$

onde $P(x, z, t)$ é o campo de pressão da onda, x e z são as coordenadas espaciais, t é a coordenada temporal, $C(x, z)$ é a velocidade de propagação da onda no meio, $f(t)$ é o termo fonte, δ é o operador Delta de Dirac e x_f e z_f representam ponto de aplicação da fonte sísmica na direção.

Representando a Equação 8 na sua forma discreta como:

$$\frac{\partial^2 P(x,z,t)}{\partial x^2} = C_{i,j}^2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_{mi} P_{i-mi}^n + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mi=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_{mi} P_{i-mi}^n \right] - f^n \delta(i - i_f) \delta(j - j_f) \quad (9)$$

onde $\Delta x^2, \Delta z^2, \Delta t^2$ e f^n são respectivamente os espaçamentos da malha na direção x e z e temporal, a derivada em relação ao tempo é discretizada normalmente utilizando o operador de DF convencional de segunda ordem. Incorporando isto à Equação 9 e usando a simetria do operador otimizado, tem-se explicitamente o campo de ondas da seguinte forma (Zhou e Greenhalgh, 1992):

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^2 \Delta t^2 & \left[\left(\frac{1}{\Delta x^2} c_{mi=0} + \frac{1}{\Delta z^2} c_{mj=0} \right) P_{i,j}^n \right. \\
& + \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{mi=1}^{N/2} c_{mi} (P_{i-mi,j}^n + P_{i+mi,j}^n) + \frac{1}{\Delta z^2} \sum_{mj=1}^{N/2} c_{mj} (P_{i,j-mj}^n + P_{i,j+mj}^n) \left. \right] + 2P_{i,j}^n \\
& - P_{i,j}^{n+1} - f^n \delta(i - i_f) \delta(j - j_f)
\end{aligned} \tag{10}$$

Critério de Dispersão Numérica e Estabilidade

Para controlar a dispersão numérica na modelagem, existe uma relação entre a menor velocidade do meio contínuo C_{min} , o parâmetro G , que representa o número de pontos necessários para representar o menor comprimento de onda da malha (λ_{min}) e a frequência de corte (f_{corte}). Esses parâmetros limitam o máximo valor do espaçamento da malha de forma a não ter excessiva dispersão de energia (Mufti, 1990). A relação de dispersão é dada por:

$$h \leq \frac{\lambda_{min}}{G} = \frac{C_{min}}{G f_{corte}} \tag{11}$$

onde C_{min} é a menor velocidade do meio, G é o número de pontos por comprimento de onda e f_{corte} é a frequência de corte. O parâmetro G pode ser obtido através de uma análise de dispersão considerando o limite de erro de 0.0001 da velocidade de fase discreta (Silva, 2014).

O critério de estabilidade é dado por:

$$dt \leq \frac{\mu h}{C_{max}} \tag{12}$$

onde dt é o intervalo de tempo e C_{max} é a velocidade máxima do meio contínuo.

Resultados e Discussão

Para verificar a precisão das diferentes ordens do MDF otimizado empregados na modelagem acústica da onda, sobre modelos geologicamente complexo, foi avaliada a modelagem com operador otimizado de 16ª ordem no modelo marmousi modificado Figura 2, comparando com as diferentes ordens do método convencional. Para fins de comparação da precisão, foi gerado como referência o campo de ondas para trigésima sexta ordem convencional.

Para os traços (A e B) presentes nas Figuras 3 e 4 considere que a linha contínua representa a 36ª ordem e a tracejada a ordem conforme indicado sobre a linha. O teste para avaliação da 16ª ordem foi realizado no modelo marmousi Figura 2. O receptor está situado na posição (12,82 km , 0,462 Km). Observa-se nas Figuras 3 e o registro dos intervalos entre 1,4 s – 2 s e 1,9 s – 2,4 s. O espaçamento entre os pontos da malha, para $G = 2.0$ é de 12 m. A frequência de corte utilizada foi de 60 Hz e o intervalo de amostragem temporal para $\mu = 0.048$ é igual a 0.000104 s. Para o traço A do primeiro intervalo, que corresponde ao método convencional, visualiza-se um desvio muito significativo em relação ao registro da 36ª ordem. O registro do método otimizado (traço B), obteve praticamente o mesmo resultado da 36ª ordem convencional.

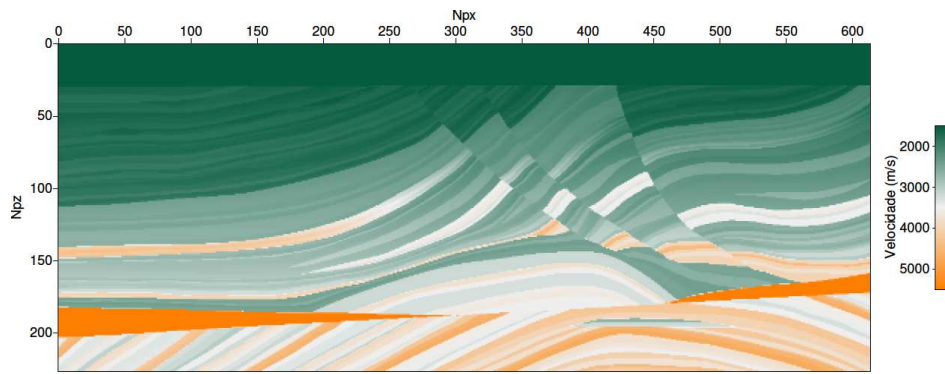


Figura 2: Modelo de velocidade Marmousi modificado para avaliação de 16ª ordem com $Np_x = 614$ e $Np_z = 227$, sendo Np_x e Np_z respectivamente o número de pontos na direção x e z do modelo.

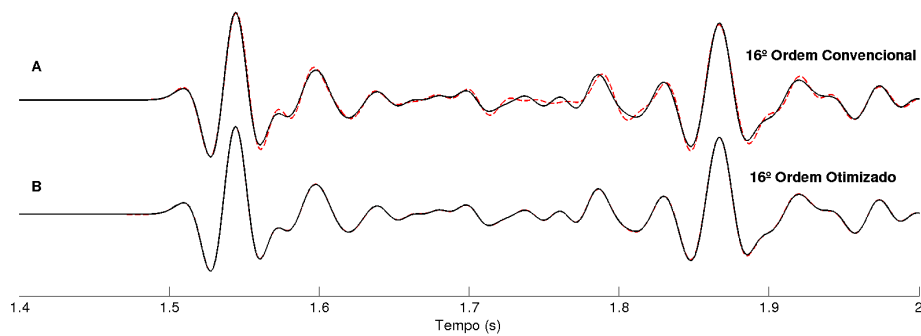


Figura 3: Comparação de precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 1,2 s à 2 s.

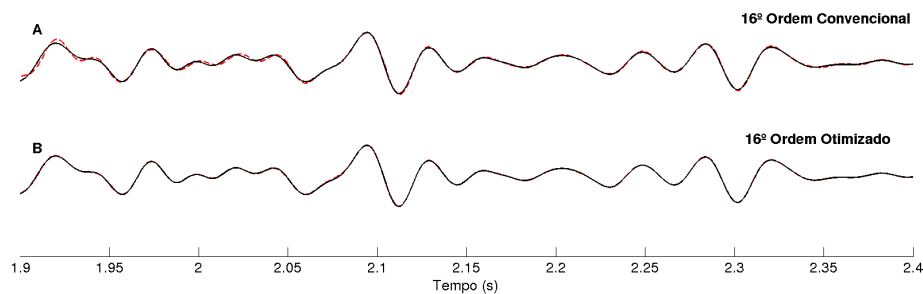


Figura 4: Comparação de precisão entre diferentes métodos para o intervalo temporal de 2 s à 2,5 s.

Avaliação Computacional

Essa seção tem como objetivo avaliar diferentes ordens do MDF comparando o custo de memória e o tempo computacional, aqui definido como o tempo de cálculo de ponto flutuante da equação da onda. De posse destas avaliações é possível concluir qual a melhor ordem de discretização para uma específica modelagem ou migração. Todas as comparações tomaram como referência a modelagem de 4ª ordem convencional e foram geradas no limite do critério de estabilidade e dispersão. Na Figura 5, pode-se perceber a redução da demanda de memória a medida que cresce a ordem de discretização. Tal resultado já era esperado, visto que, ocorre um decréscimo no número de pontos por comprimento de onda com o aumento da ordem. Comparando os resultados gerados pelo método convencional e o otimizado, verifica-se para uma dada ordem, que o método otimizado esteve sempre a frente do convencional. A 16ª ordem otimizada teve uma menor demanda de memória que a 36ª ordem convencional, chegando a uma redução de 80% comparado com a 4ª ordem convencional, sendo a ordem com menor custo de memória dentre as analisadas.

Os resultados do método otimizado apresentaram uma elevada precisão frente o método convencional. Ressalta-se que, para a mesma ordem, esse ganho de precisão foi obtido com o mesmo custo computacional. Para fins de comprovação de precisão, foi utilizado para uma dada ordem os critérios de estabilidade referente aos coeficientes otimizados, visto que, o valor do espaçamento entre a malha aumenta e o intervalo temporal diminui em relação ao método convencional. Já o limite do passo de tempo gerado pela análise de estabilidade, ao contrário da análise da demanda de memória, diminui com o crescimento da ordem. Isso se deve ao fato da constante de estabilidade μ decrescer com o crescimento da ordem. Esse fato implica diretamente no aumento da quantidade de iterações temporais e na variação do estêncil do operador. Sua variação está relacionada com o aumento ou não das operações aritméticas, para um intervalo temporal, o que implica diretamente no aumento do tempo final da modelagem.

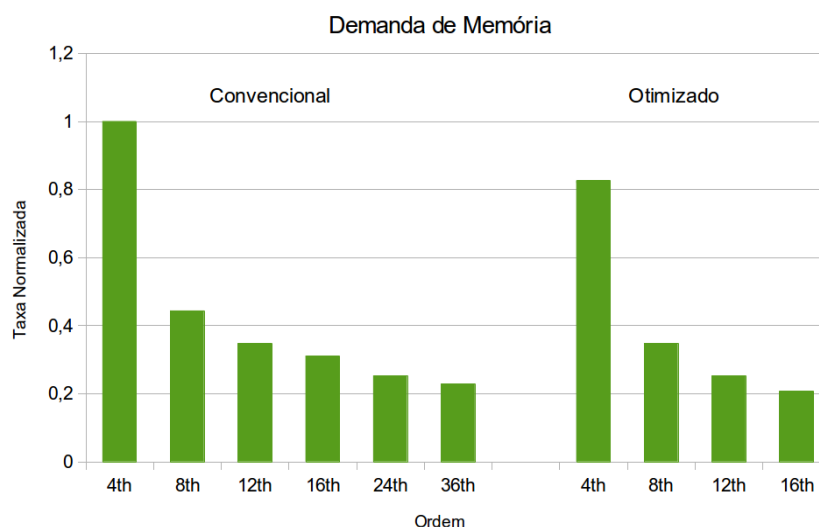


Figura 5: Avaliação da demanda de memória para diferentes ordens do MDF Convencional e Otimizado.

Na Figura 6 encontram-se os resultados da análise do tempo computacional para diferentes ordens do método convencional e do o otimizado. Nela verifica-se que tanto para o método convencional e o método otimizado, a 8ª ordem teve melhor resultado, dentre as ordens analisadas. Porém para o método otimizado a 8ª ordem teve um custo mais elevado que o convencional, em virtude de ter um menor intervalo de amostragem temporal. Para as ordens mais elevadas, o método otimizado apresentou sempre redução de demanda de memória acima de 60% e de 40% de tempo computacional em relação a 4ª ordem, representando uma excelente escolha para quem deseja obter uma melhor precisão em menor tempo. A utilização do MDF otimizado alcança simultaneamente duas importantes reduções, a demanda de memória e o custo do tempo de processamento.

Conclusões

Nós apresentamos as avaliações e testes utilizando o esquema DF otimizado aplicado na modelagem acústica da onda. Foi avaliada a precisão dos operador de DF otimizado levando em consideração o limite de erro empregado por (Liu e Yao, 2013). A expansão de 16ª otimizada alcançou um resultado acima da 36ª ordem convencional. Isso reflete a importância do operador otimizado e demonstram sua maior precisão em relação ao operador convencional. Tomando como referência a expansão de 4ª ordem foi alcançado, uma redução de memória de aproximadamente 80% acompanhada de uma redução de aproximadamente 42% do tempo computacional. Nessa avaliação, o modelo foi reamostrado e o tempo computacional, levado em consideração foi em relação às operações de ponto flutuante da discretização da equação da onda.

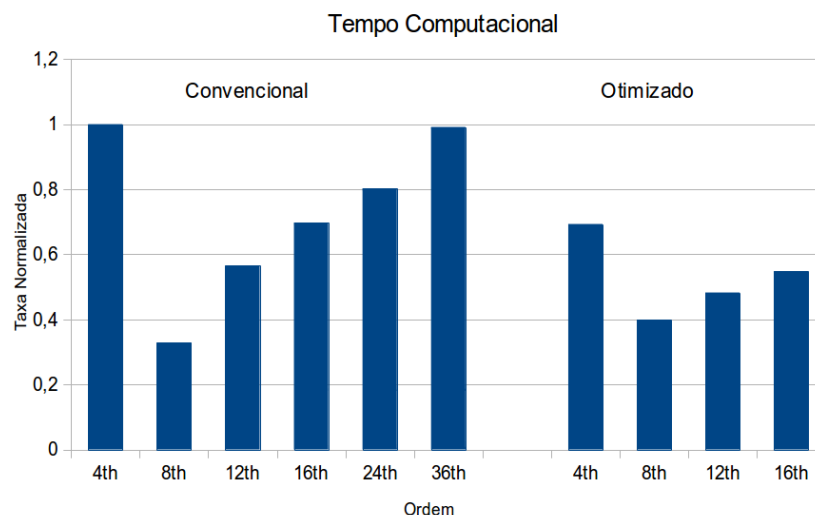


Figura 6: Avaliação do tempo computacional para diferentes ordens do MDF.

Agradecimentos

Esse trabalho foi financiado pelo IBP.

Referências Bibliográficas

- ALFORD, R. M., KELLY, K. R., BOORE, D. M., 1974, "Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation", *Geophysics*, v. 39, n. 6, pp. 834–842.
- CHU, C., STOFFA, P. L., 2012, "Determination of finite-difference weights using scaled binomial windows", *Geophysics*, v. 77, pp. 57–67.
- NORMAN, R., 1953, "The form and laws of propagation of seismic wavelets", *Geophysics*, v. 18, n. 1, pp. 10-40.
- MUFTI, I. R., 1990, "Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance", *Geophysics*, v. 55, pp. 1166-1182.
- LIU, Y., SEN, Y. M., 2009, "A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation", *Journal of Computational Physics*, v. 228, pp. 8779–8806.
- LIU, Y., 2013, "Globally optimal finite-difference schemes based on least squares", *Geophysics*, v. 78, pp. T113– T132.
- SILVA, B. S., 2014, "Avaliação de Operadores Convolucionais na Solução da Equação Acústica da Onda". Dissertação, UFRJ, Rio de Janeiro, Março.
- VIRIEUX, J., 1986, "SH-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method", *Geophysics*, v. 51, pp. 889-901.
- ZHANG, J. H., YAO, Z. X., 2013, "Optimized finite-difference operator for broad-band seismic wave modeling", *Geophysics*, v. 78, pp. 1-6.