



TÍTULO DO TRABALHO:

MODELAGEM NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL SOBRE DUTOS SUBMERSOS

AUTORES:

Liad Paskin¹, José Luis Drummond Alves¹, Carlos Eduardo Silva¹

INSTITUIÇÃO:

¹Lamce/PEC/COPPE/UFRJ

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 8º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás - 8º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás - ABPG, no período de 20 a 22 de outubro de 2015, em Curitiba/PR. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 8º PDPETRO.

MODELAGEM NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES EM ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL SOBRE DUTOS SUBMERSOS**Abstract**

Engineering problems involving fluid flows are widely found in industrial fields, as for example the Oil and Gas industry. Evaluation of physical quantities in a flow, such as pressure and velocities is a common practice in structure and equipment design. There are cases where the flow may exist in a level of complexity that doesn't fit on the simplifications where analytical models rely, showing an engineering demand for experimental and numerical procedures. In this context, this work presents a numerical modelling technique for fluid mechanics, with particular attention to incompressible, two dimensional flows and Newtonian fluids. A numerical model was developed using a penalized, finite element formulation, able to treat mathematical difficulties of null divergence that translates the kinematic constraints of incompressibility. The implemented code employs quadratic triangular elements with reduced integration used for the penalized term, while full integration is used for the remaining. The convective term of the momentum conservation equation was linearly treated by the Picard method. Time discretization is accomplished by the finite difference method of Crank Nicolson. Finally, a numerical application solved by the proposed model is presented as an outer flow through the von Karman Cylinder. Those applications showed good agreement to the available results in bibliography.

Introdução

O estudo da mecânica dos fluidos é atividade de grande relevância histórica para o desenvolvimento científico e tecnológico (Eckert, 2007). Preenchendo o meio ambiente em sua totalidade, a ciência frequentemente depara-se com o objetivo de descrever o comportamento fluido, que induz esforços e movimentos nos mais variados objetos de estudo. À medida que se expande o conhecimento sobre a natureza, aprofunda-se o domínio sobre o comportamento fluido induzindo à exploração de suas propriedades e sua consequente aplicação nos mais diversos setores industriais, como no de óleo e gás.

Os procedimentos que embasam o estudo dos fluidos são analíticos, experimentais ou numéricos. Os modelos analíticos capazes de solucionar as equações que descrevem o movimento fluido se baseiam em hipóteses simplificadoras sobre seu comportamento, e.g., escoamentos homogêneos, simétricos, não transientes, puramente viscosos, ou não viscosos. Na maior parte das aplicações de engenharia, o escoamento de interesse possui complexidade tal, que não atende às simplificações nas quais se baseiam esses modelos analíticos. Evidencia-se assim uma demanda de engenharia por procedimentos experimentais e numéricos.

Uma discussão comparativa quanto ao emprego de procedimentos analíticos, experimentais ou numéricos é apresentada por (Griebel, et al., 1998), que explica como procedimentos experimentais são limitados por seu aparelhamento tecnológico, na maior parte das vezes incapaz de fazer medidas que envolvam escalas excessivamente pequenas ou grandes, sejam no espaço ou no tempo. Nesses procedimentos o número de medições é limitado por razões físicas e econômicas. Considerações operacionais relativas à segurança podem tornar determinado experimento inviável. Finalmente, para se tornarem viáveis esses procedimentos frequentemente assumem simplificações que comprometem a precisão e acurácia do resultado obtido em escala de campo. Procedimentos numéricos são capazes de reproduzir esses experimentos em ambiente virtual, e assumem cada vez maior participação em procedimentos de engenharia a medida que os recursos computacionais se tornam mais poderosos.

Por procedimentos numéricos em engenharia, entende-se diferentes métodos capazes de solucionar de forma aproximada as equações que descrevem determinado fenômeno, através de sua discretização como por exemplo, no espaço e no tempo. Dentre os métodos mais empregados para solucionar numericamente as equações de Navier Stokes estão os métodos de Diferenças Finitas (MDF), Volumes Finitos (MVF) e Elementos Finitos (MEF). Embora seu emprego na mecânica dos sólidos tenha o consagrado como o método mais adequado para problemas elípticos em domínios de complexidade arbitrária (Gresho & Sani, 1998), historicamente o MEF vem sido menos empregado na simulação de fluidos, quando comparado ao MDF e MVF. Ainda segundo (Gresho & Sani, 1998), esse “atraso” vem sido compensado pelas novas metodologias de elementos finitos sendo desenvolvidas para lidar com as dificuldades inerentes à simulação de fluidos, e.g., o operador assimétrico que representa os termos convectivos e a restrição cinemática de incompressibilidade.

A restrição cinemática de incompressibilidade é uma das maiores dificuldades envolvidas na simulação computacional de fluidos, sendo matematicamente expressa pelo divergente nulo do campo de velocidades (Gresho & Sani, 1998). Para satisfazer essa restrição, o campo de aproximação da velocidade deve ser construído com divergente nulo a priori, característica essa somente atendida por funções solenóides. Este problema é descrito por (Karam, 1989), que expõe como únicas formulações capazes de aplicar funções solenóides como espaço de aproximação das equações de Navier Stokes, aquelas baseadas na função corrente como variável principal, uma abordagem limitada ao espaço bi-dimensional que requer o pós processamento do campo de velocidade a partir de derivadas da solução, comprometendo a precisão do método. A técnica de multiplicadores de Lagrange apresenta-se como alternativa a este problema, conduzindo ao método misto de Galerkin. Outra alternativa para o tratamento da restrição cinemática apresentada é a formulação penalizada adotada neste trabalho e descrita por (Hughes, et al., 1979) como “*A mais simples e efetiva implementação da incompressibilidade ao método dos elementos finitos*”.

Em modelos matemáticos com restrições internas, como no caso da incompressibilidade, as propriedades do modelo contínuo não são automaticamente transferidas para o modelo discreto (Karam, 1989). Dessa forma as condições de existência e unicidade para o modelo discreto expressas pelo teorema de Brezzi (Brezzi, 1974) devem ser avaliadas para cada espaço de aproximação escolhido. O método penalizado substitui o modelo incompressível por um modelo quase incompressível e portanto torna-se desnecessário atender à restrição cinemática de incompressibilidade a priori. Entretanto, a convergência do modelo discreto não é atingida de forma automática. A integração reduzida dos termos penalizados torna o modelo obtido matematicamente semelhante aquele obtido pelos métodos mistos (Malkus & Hughes, 1978), garantindo sua convergência.

O presente artigo apresenta uma metodologia de modelagem numérica de fluidos pelo método dos elementos finitos aplicado ao escoamento incompressível e bi-dimensional de um fluido newtoniano. Elementos triangulares quadráticos são empregados. Integração reduzida é utilizada para avaliar-se os termos penalizados e integração completa para os demais (Hughes, et al., 1979). O termo convectivo na equação de conservação do movimento é linearizado pelo método de Picard (Engelman, et al., 1981). O método de diferenças finitas de Crank-Nicolson é responsável pela discretização temporal do modelo (Hughes, 1987).

Na próxima seção, as equações de governo serão introduzidas e os algoritmos de maior relevância dentro os empregados por essa metodologia serão descritos. A seguir, apresenta-se modelagens que validam o desenvolvimento desta metodologia e ilustram sua aplicabilidade à indústria de óleo e gás.

Metodologia

Fluidos newtonianos e escoamento incompressível

Sejam o domínio espacial $\Omega \subset R^{n_{sd}}$, o número de dimensões espaciais n_{sd} , Γ o contorno de Ω e o intervalo $[0, t_f]$ o domínio espacial considerado. No domínio contínuo $\Omega \times [0, t_f]$, as equações de Navier Stokes que governam a conservação de momentum do escoamento de um fluido newtoniano, quando aplicadas a um regime incompressível e descritas em referencial Lagrangiano, são apresentadas em sua forma diferencial:

$$\rho (\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (1)$$

Onde ρ e $\mathbf{u}$ são respectivamente a densidade e o campo de velocidades, $\mathbf{b}$ é o vetor de forças de corpo que considera o efeito da gravidade e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy.

A conservação de massa no domínio considerado é expressa pela equação da continuidade aplicada a um regime incompressível, impondo a restrição cinemática:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Sendo o fluido newtoniano escoando em regime incompressível, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3)$$

Onde p é a pressão, $\mathbf{I}$ a matriz identidade, μ a viscosidade dinâmica e $\mathbf{D}$ o tensor simétrico da taxa de deformação, dado por:

$$\mathbf{D} = 1/2 \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (4)$$

Formulação penalizada

A formulação penalizada das equações (1) e (2) é obtida impondo uma relação entre a pressão e o campo de velocidades tal que:

$$p = -\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5)$$

Onde λ é o parâmetro de penalização. Percebe-se na equação (5) que para manter a pressão finita a medida que λ tende a infinito, o divergente do campo de velocidades deve ser nulo. A convergência da formulação penalizada para as equações incompressíveis de Navier Stokes a medida que λ tende a infinito foi comprovada por (Temam, 1977). O parâmetro λ deve portanto, ser suficientemente grande para que as compressibilidades introduzidas sejam mínimas, mas não grande demais para introduzir complicações numéricas. Segundo (Hughes, et al., 1979), o parâmetro λ pode ser expresso como:

$$\lambda = c \mu \quad (6)$$

Onde c é uma constante dependente do tamanho de palavra do computador utilizado. Ainda segundo (Hughes, et al., 1979) estudos numéricos revelam que para um tamanho de palavra de ponto flutuante entre 60 e 64 bits, uma escolha apropriada para c é de 10^7 .

Discretização espacial

A discretização espacial da equação (1) pelo método dos elementos finitos em uma formulação penalizada de Galerkin leva a um sistema do tipo:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (7)$$

Onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ a matriz de rigidez não linear, $\mathbf{F}$ o vetor forçante e $\dot{\mathbf{u}}$ o campo de aceleração local.

Elementos triangulares quadráticos compõem o domínio discreto. Para garantir a convergência da formulação proposta, os termos em $\mathbf{C}$ que contêm o parâmetro λ devem ser integrados de forma reduzida por um ponto de Gauss. Os demais termos da equação (7) são integrados em três pontos de Gauss.

Algoritmo de solução transiente

Neste trabalho utilizou-se o algoritmo implícito de Crank Nicolson para a discretização temporal do problema. O método de Crank Nicolson pertence à família de métodos trapezoidais (Hughes, 1987) descritos pelas equações (8), (9) e (10). Ao substituir o parâmetro $\alpha = 0.5$ nas equações abaixo obtém-se o método de Crank Nicolson na forma em que este foi implementado. Seja o intervalo entre passos de tempo Δt e os subscritos abaixo identificando o passo de tempo ao qual se refere determinada variável, primeiramente calcula-se o preditor do campo de velocidades $\mathbf{u}_{i+\alpha}$:

$$\mathbf{u}_{i+\alpha} = \mathbf{u}_i + (1 - \alpha) \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+\alpha} + \alpha \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (9)$$

A substituição da equação (9) no sistema (7) avaliado no passo de tempo $i + 1$, leva a um sistema de equações capaz de ser solucionado para o campo de aceleração local:

$$(M + \alpha \Delta t K) \dot{u}_{i+1} = F_{i+1} - K u_{i+\alpha} \quad (10)$$

Obtido o campo de aceleração local, o campo de velocidades pode ser atualizado através da equação (9).

Onde $\tilde{u}_{n+1}$ é o preditor do campo de velocidades, Δt o passo de tempo, e γ uma constante que determina a estabilidade do método. Nas aplicações seguintes $\gamma = 0.5$. Os subscritos acima referem-se ao instante de tempo considerado tal que $t_n = n \Delta t$. A equação (8) é resolvida a cada iteração, e os superscritos acima identificam a iteração considerada. A matriz não linear $K(u_{n+1}^{(i)})u_{n+1}^{(i)}$ é avaliada de forma explícita enquanto a matriz simétrica linear $(M + \gamma \Delta t C)$ é avaliada de forma implícita. Sendo a matriz a ser invertida linear, a operação de inversão de matrizes é efetuada somente uma vez.

A matriz $(M + \alpha \Delta t K)$ é não linear, devendo portanto ser invertida a cada passo de tempo. A operação de inversão é realizada de forma direta pelo algoritmo de Crout (Hughes, 1987). O algoritmo de reordenamento de malha de Cuthill Mckee foi implementado para otimizar a inversão da matriz.

Análise não linear

O método iterativo de Picard (Engelman, et al., 1981) é adotado de forma que a matriz de rigidez $K(u)$ ilustrada na equação (7) é avaliada considerando-se o campo de velocidades já conhecido no passo de tempo anterior. Indicando o subscrito $i + 1$ o passo de tempo atual, então avalia-se a equação (7) em sua forma discreta:

$$M \dot{u}_{i+1} + K(u_i) u_{i+1} = F \quad (11)$$

Na presente metodologia introduz-se uma modificação ao método de Picard, aonde um critério baseado no número de Courant evita que a fatoração e montagem da matriz ocorra a todo passo de tempo. Segundo este critério a matriz só será novamente fatorada se o CFL máximo obtido no passo de tempo presente seja superior ao CFL máximo obtido em um passo de tempo anterior. Em caso contrário, somente o algoritmo de retro-substituição responsabiliza-se pela solução do sistema. O CFL máximo é avaliado a nível de elemento:

$$CFL_{max} = \max_e \left\{ u_{ei} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x_e} \right\}, e = 1, n_{el} \quad (12)$$

onde e representa a identificação do elemento, Δx_e o comprimento característico do elemento e u_{ei} sua velocidade característica no passo de tempo i . O comprimento característico é tomado como a média de comprimento dos lados do elemento e a velocidade característica é avaliada pela fórmula abaixo.

$$u_{ei} = \frac{1}{3} \sum_{n_c=1}^3 \sqrt{u_{1n_c}^2 + u_{2n_c}^2} \quad (13)$$

onde n_c representa cada um dos vértices do elemento triangular e u_{1n_c} e u_{2n_c} são as componentes do vetor de velocidade avaliadas no ponto n_c .

Resultados e Discussão

Nessa seção, explora-se a modelagem de uma seção bidimensional de duto submerso sob incidência de corrente uniforme. A aplicação seguinte tem o objetivo de validar e demonstrar as capacidades da metodologia proposta. Este problema é descrito por (Brooks & Hughes, 1982) como “*Um dos problemas mais desafiadores para modelagens numéricas, uma vez que todos os termos nas equações de governo são relevantes.*”.

Análise de um duto submerso

Ao imergir um corpo cilíndrico em um escoamento uniforme observa-se o descolamento da camada limite e o surgimento de um par de vórtices a jusante do corpo. Quando o escoamento atinge mais altos números de

Reynolds esses vórtices se tornam instáveis e são carregados de forma alternada pela corrente incidente. Surge então a esteira de vórtices de Von Karman.

O modelo em questão, suas dimensões e condições de contorno são ilustradas na Figura 1. A borda esquerda do domínio apresenta velocidade prescrita perpendicular, unitária e constante. A borda direita apresenta vetor de tensão nulo. Nas bordas superior e inferior prescreve-se fluxo e cisalhamento nulos, enquanto o campo de velocidades em torno do cilindro é também nulo.

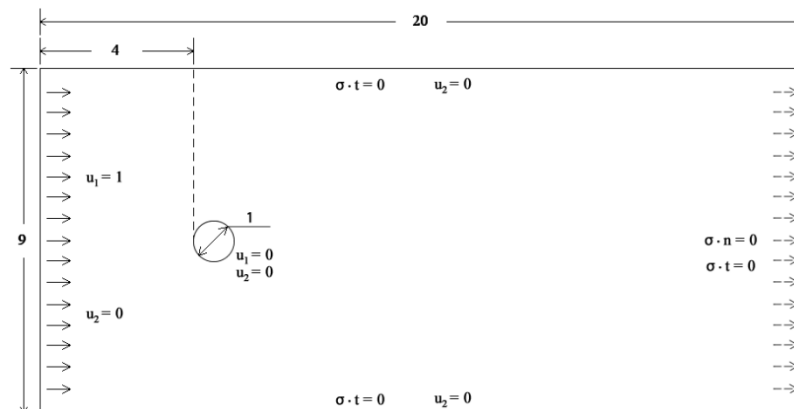


Figura 1 – Geometria e condições de contorno do modelo de duto submarino

A malha estruturada responsável pela discretização espacial do domínio proposto é ilustrada na Figura 2, e possui 45,296 nós distribuídos em 22,400 elementos. O intervalo de tempo adotado é de 0,001 unidades.

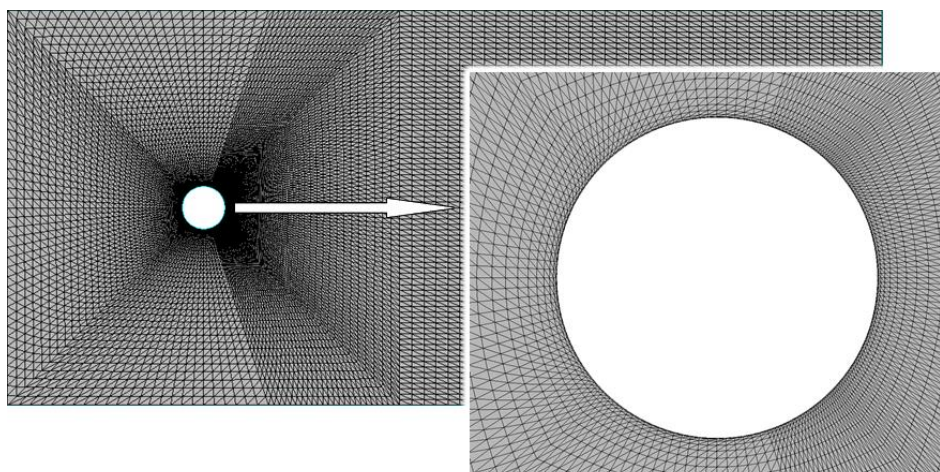


Figura 2 – Malha do modelo de duto submerso

O número de Reynolds do modelo é avaliado considerando comprimento e velocidade característicos unitários. Os resultados seguintes foram observados para número de Reynolds 100.

O período de despreendimento de vórtice observado é de 6,13 unidades de tempo, aproximando-se da previsão empírica de 6,25 unidades de tempo.

Para validar os resultados obtidos, modelou-se o mesmo problema com o software comercial de volumes finitos, Fluent. A figura ___ dispõe em quatro gráficos a comparação entre os resultados obtidos com a presente metodologia e com o Fluent. Cada um desses gráficos representa um ponto diferente de nosso domínio, posicionados ao longo da linha de centro horizontal do modelo, onde a velocidade vertical é plotada em função do tempo. Os resultados obtidos indicam boa concordância entre as amplitudes da velocidade observada nesses pontos, entretanto a frequência de liberação de vórtices difere substancialmente entre ambos os modelos. O período de liberação de vórtice observado pelo Fluent é de 8,36 unidades de tempo. A diferença observada entre os resultados ilustrados no primeiro gráfico, i.e., aquele que representa o ponto mais próximo do inlet, pode dever-se à utilização de interpolação quadrática na presente formulação e deve ser melhor estudada. A baixa magnitude da perturbação gerada no inlet, quando comparada aos demais gráficos, permite que se desconsidere sua influência nas análises aqui apresentadas.

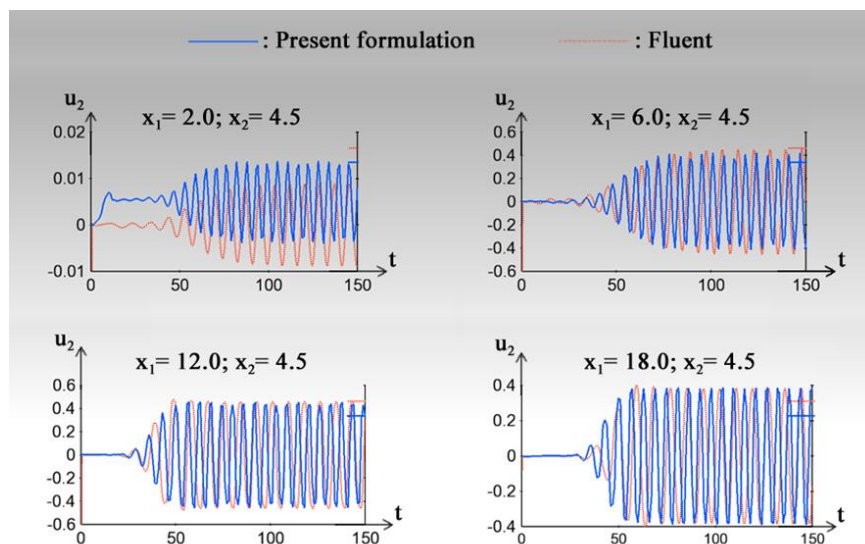


Figura 3 – Resultados do modelo de duto submarino, obtidos pela presente formulação e pelo Fluent para Reynolds 100.

A Figura 4 ilustra os resultados obtidos pela presente formulação para Reynolds 100, colorindo o domínio pela magnitude da velocidade e traçando linhas de contorno para pontos de igual magnitude.

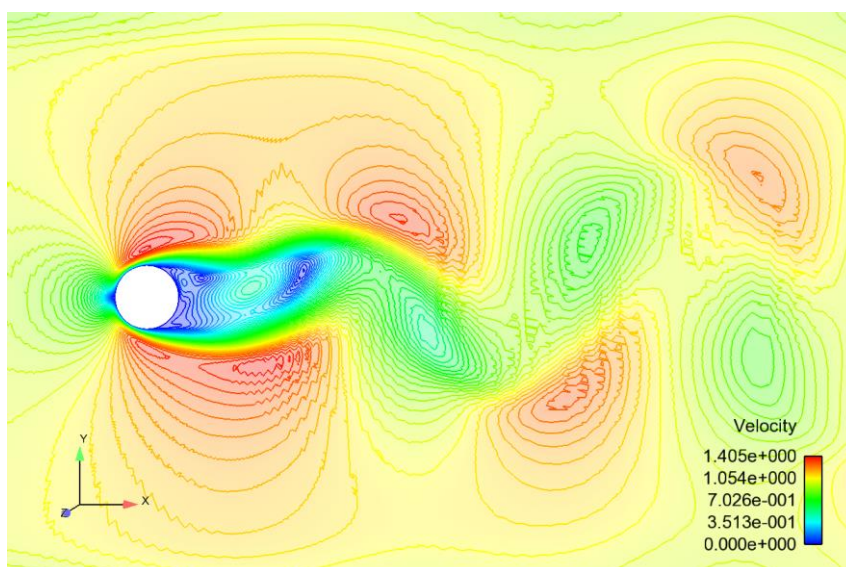


Figura 4 – Resultados do modelo de duto submarino, obtidos pela presente formulação para Reynolds 100.

A Figura 5 descreve o CFL máximo observado em cada passo de tempo. Os passos de tempo onde ocorre a fatoração são marcados em preto nesta curva. Percebe-se que a fatoração ocorre sempre que o CFL aumenta. Sendo a fatoração o procedimento mais custoso em nossa modelagem, a presente metodologia proporcionou relevantes ganhos de tempo, sem que se comprometesse a confiabilidade do método.

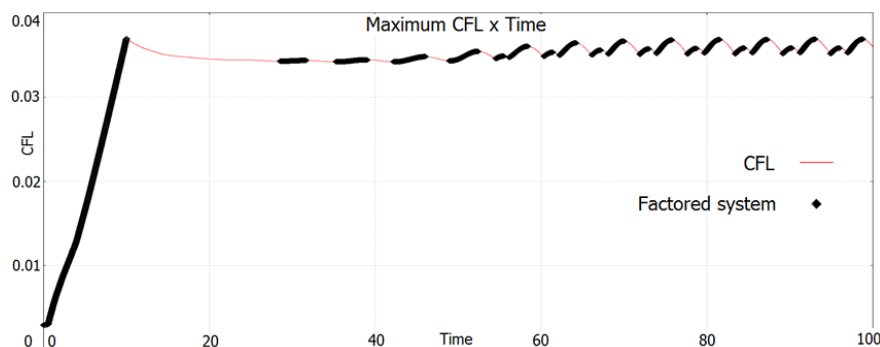


Figura 5 – CFL máximo para cada passo de tempo, e a marca dos passos onde ocorre a fatoração. Modelo de duto submerso, Reynolds 100.

Conclusões

Este trabalho apresenta uma metodologia penalizada de elementos finitos, capaz de modelar escoamentos incompressíveis bi-dimensionais de fluidos Newtonianos. Primeiramente contextualizou-se a mecânica dos fluidos por sua importância na engenharia, introduzindo importantes aspectos computacionais relacionados ao estudo numérico de fluidos. Sequencialmente, os principais algoritmos que compõem a metodologia desenvolvida foram expostos.

O principal objetivo desta metodologia foi atingido, ao desenvolver-se uma ferramenta numérica capaz de solucionar as equações de Navier Stokes de forma conveniente e robusta, sem o uso de parâmetros de estabilização. Os resultados obtidos demonstram boa concordância com aqueles encontrados na literatura, demonstrando alguma das capacidades dos métodos escolhidos. A adaptação introduzida ao método de Picard demonstrou-se eficiente, economizando relevante tempo de CPU. O critério escolhido para sua aplicação foi considerado conservador, por não introduzir diferenças identificáveis nos resultados obtidos. Entretanto, esse critério deve ser melhor investigado, podendo se tornar ainda mais efetivo ao reduzir o número de iterações sem que se comprometa a qualidade final da solução.

Trabalhos futuros envolvem estender a capacidade do código implementado para que lide por exemplo com problemas tri-dimensionais, bi-fásicos, de interação fluido-estrutura e superfície livre.

Referências Bibliográficas

Brezzi, F., 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*.

Brooks, A. N. & Hughes, T. J., 1982. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*.

Eckert, M., 2007. *The dawn of fluid dynamics: a discipline between science and technology*. s.l.:John Wiley & Sons.

Engelman, M., Strang, G. & Bathe, K. J., 1981. The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

Gresho, P. M. & Sani, R. L., 1998. *Incompressible flow and the finite element method*. New York: John Wiley and Sons, Inc..

Griebel, M., Dornseifer, T. & Neunhoffer, T., 1998. *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Hughes, T. J. R., 1987. *The finite Element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc..

Hughes, T. J. R., Liu, W. K. & Brooks, A., 1979. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *Journal of Computational Physics*.

Karam, F. J., 1989. *Uma nova formulação de elementos finitos mistos para escoamentos incompressíveis*. Rio de Janeiro(RJ): Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Malkus, D. S. & Hughes, T. J. R., 1978. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

Temam, R., 1977. Navier-Stokes Equations. *North Holland*.