

8º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

Proposta de uma metodologia para determinar a instabilidade dinâmica de sistemas girantes compostos com material viscoelástico

AUTORES:

Thiago da Silva, Bolsista PRH-24 ANP, Departamento de Engenharia Mecânica

Carlos Alberto Bavastri, Departamento de Engenharia Mecânica

Ana Gabriela Martinez, Departamento de Matemática

INSTITUIÇÃO:

Universidade Federal do Paraná

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 8º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás - 8º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás - ABPG, no período de 20 a 22 de outubro de 2015, em Curitiba/PR. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 8º PDPETRO.

PROPOSTA DE UMA METODOLOGIA PARA DETERMINAR A INSTABILIDADE DINÂMICA DE SISTEMAS GIRANTES COMPOSTOS COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

Abstract

Nowadays there is an increasing demand for rotating equipment working at high rotation as turbines, pumps, compressors and others. Furthermore, these machines have been increasingly required to operate near or above their specific critical rotation speed. The instability in high-speed rotors is one of the main causes of its problems, which may lead to catastrophic rotor failure or premature weakening. One way to mitigate this rotor dynamics problem is the addition of damping in the bearings. The use of viscoelastic materials (VEM) for vibration control, either through isolation or dynamic neutralizers, has been applied with relative success in the last years, because beside its high capacity to dissipate vibrational energy. The VEM have lower initial costs implementation and maintenance. One way to set the instability of a system is to check the real part of the associated eigenvalues. In the general case, the problem have to be solved in the state space, a $2n$ dimensional space, where n is the number of degrees of freedom or natural frequencies. In numerical models involving matrices with real coefficients, it is know that, in the state space, the eigenvalues appear with double multiplicity and complex conjugate pairs. On the other hand, when using the fractional-derivative model describing the dynamic behavior of viscoelastic materials, such as, polymers, rubbers, for example, the matrix has complex coefficients in the frequency domain. In this case, the eigenvalues have to be in some way related by redundancy information that may appear in complex conjugate pairs and complex, and, also, in complex and its opposite pairs, as has been observed in some numerical simulations and previous works. If this is the case, a simple inspection of the real part of the eigenvalues cannot be performed, since the numeric codes could not determine which eigenvalue is physically relevant. Within this context, the aim of this work is to propose a method for accurately estimate the dynamic instability of rotors when they are built with viscoelastic materials. The proposed method will be implemented and numerical simulations will show its potential through real examples.

Introdução

Atualmente, existe uma demanda cada vez maior por equipamentos rotativos trabalhando a elevadas rotações como turbinas, bombas, compressores entre outros. Além disto, estas máquinas são forçadas cada vez mais a operar acima ou perto da sua velocidade de rotação crítica. Quando estas condições acontecem, a probabilidade de ter desgastes excessivos em diferentes partes de um rotor, provocados por vibrações, aumenta consideravelmente. Com isto, as peças tendem a ser mais exigidas, provocando fadiga, desbalanceamentos e até mesmo sua ruptura. A instabilidade presente nos rotores em altas rotações é uma das principais causas destes problemas. Um dos métodos mais utilizados é a adição de amortecimento nos mancais do eixo do rotor, que pode mitigar esta condição de funcionamento não desejada, ampliando sua faixa útil de trabalho com o consequente aumento da sua vida útil. O uso de materiais viscoelásticos (MVE) em controle de vibrações, seja através de isolamento ou neutralizadores dinâmicos, tem sido aplicado com relativo sucesso já há alguns anos. Além de ter uma elevada capacidade de dissipar energia vibratória, seus custos iniciais de implementação e de manutenção são mais baixos que as soluções tradicionais – uso de mancais hidrodinâmicos e magnéticos. Os MVE tornaram-se uma alternativa para reduzir vibrações e ampliar a faixa de funcionamento de um rotor de forma estável. A modelagem do comportamento dinâmico destes materiais é representada neste trabalho pela sua equação constitutiva – que contem relações de tensões-deformações – usando derivadas de ordem fracionárias. Esta modelagem reproduz com boa precisão as características dinâmicas dos

materiais viscoelásticos mais utilizados na engenharia, em uma ampla faixa de frequência e de temperatura, com um número reduzido de parâmetros.

Conforme FERREIRA (2004), a instabilidade implica em um movimento livre que pode tender a um acréscimo de amplitude sem limite, quando um sistema em princípio em equilíbrio é exposto a pequenas perturbações. Em máquinas girantes, este fenômeno geralmente está associado às elevadas velocidades de rotação de um eixo e à capacidade do sistema de voltar a sua posição de equilíbrio, estático ou dinâmico, após uma perturbação qualquer. Quando a instabilidade do sistema é atingida, vibrações excessivas podem provocar desgastes no rotor ou em algum elemento deste de forma prematura. Segundo GENTA (2005) o aumento da velocidade de rotação de um rotor pode gerar perturbações devido à mudança da força centrífuga, que pode ocasionar um aumento ilimitado da amplitude de vibrações livres.

Uma das formas de estudar o comportamento dinâmico devido à instabilidade de um rotor é através do problema de autovalores. Em geral, quando as matrizes possuem coeficientes reais e o modelo de amortecimento é o geral, os autovalores, λ_i , com $i = 1$ a n graus de liberdade, vêm em pares complexos e complexos conjugados. A parte real do autovalor fornece o fator de crescimento ou decrescimento da resposta de um sistema em vibração livre e a parte imaginária fornece a oscilação da mesma. Portanto, para analisar a estabilidade do rotor, basta analisar o sinal da parte real dos autovalores, $\lambda = -s$, sendo s o coeficiente de Laplace. Assim, se o sinal da parte real de λ é positivo, o sistema é estável, caso contrario o sistema é instável. O uso de materiais viscoelásticos gera matrizes de rigidez complexas, em função da frequência e da temperatura. Estas matrizes complexas mostram a capacidade destes materiais de armazenar e dissipar energia vibratória. Esta afirmação, associada ao fato que rotores possuem o efeito de amortecimento próprio e o efeito giroscópico, fazem com que os autovalores se apresentem, no espaço de estado, em pares complexos e opostos. Tendo como informação para o estudo de instabilidade autovalores complexos e seu negativo complexo, o estudo de instabilidade analisando a parte real dos mesmos fica comprometida por não se saber quem é o complexo e quem seu negativo o, principalmente quando estes trocam produzindo a instabilidade. Para resolver este problema uma metodologia simples foi implementada neste trabalho. Simulações em rotores compostos com material viscoelástico mostram tal metodologia e os resultados obtidos com a mesma.

Metodologia

Instabilidade dinâmica

Para ilustrar instabilidade em um modelo equivalente de um grau de liberdade como o representado na fig. 01, parte-se da equação de movimento livre, isto é,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (01)$$

onde m , c e k são os elementos de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

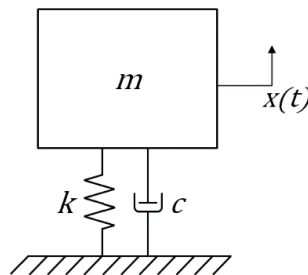


Figura 01 – Representação de um sistema com um grau de liberdade

A solução da eq. (01) pode ser representada por

$$x(t) = X e^{st}. \quad (02)$$

Substituindo-se a eq. (02) em (01), obtêm-se a equação característica:

$$ms^2 + cs + k = 0. \quad (03)$$

A solução da eq. (03), para amortecimento subcrítico, toma valores complexo e complexo conjugado (EWINS, 1984),

$$s = -\xi\Omega_n \pm i\Omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad (04)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento, que é equivalente a $\frac{c}{2\sqrt{km}}$, e Ω_n é a frequência natural não amortecida, que é dada por $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Percebe-se assim que o termo real (Re) da eq. (04) determina se o sistema é estável, ou seja, se $Re(s) < 0$ o sistema será estável e se $Re(s) > 0$ será instável e o termo imaginário ($Im(s)$) representa a frequência amortecida do sistema.

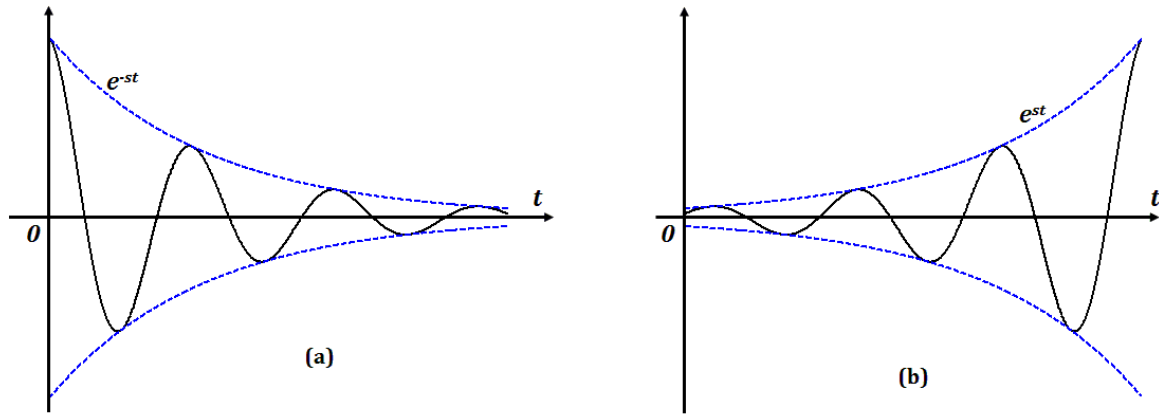


Figura 02 – Resposta à excitação. (a) Estável; (b) Instável

Modelagem Matemática do Rotor com suportes viscoelásticos

Os modelos utilizados para o equacionamento do rotor foram definidos em LALANNE e FERRARIS (1990) e GENTA (2005). A adição de componentes viscoelásticos nos mancais está descrita em RIBEIRO (2015). Naquele trabalho, a matriz de rigidez passa a ser complexa e função da frequência e da temperatura. Assim, a equação de movimento de um rotor composto com material viscoelástico é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{q}(t) + [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm})]\dot{q}(t) + \bar{\mathbf{K}}(\Omega)q(t) = f(t), \quad (05)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de inércia (constante e simétrica), $\mathbf{G}$ a matriz giroscópica do eixo e disco (função da rotação e antissimétrica), $\mathbf{C}$ é a matriz de amortecimento interno do eixo e do mancal (constante e simétrica), $\bar{\mathbf{K}}(\Omega)$ a matriz de rigidez do eixo e dos mancais (simétrica, complexa e em função da frequência), q é o vetor de coordenadas generalizadas e f é o vetor de forças generalizadas. Notar que a eq. (05) é denominada de “non-equation”, pois apresenta componentes variando no domínio do tempo (t) e da frequência (Ω) (CRANDAL, 1970) (GAUL, 1999).

Devido ao aumento dos graus de liberdade, as matrizes apresentadas na eq. (05) têm dimensões iguais a $(d + 2s) \times (d + 2s)$, onde d é a dimensão inicial do sistema e s corresponde ao número de suportes inseridos. Os vetores q e f , possuem dimensão de $(d + 2s)$.

Representando a eq. (05) no domínio da frequência tem-se:

$$\{-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm})] + \bar{\mathbf{K}}(\Omega)\} Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (06)$$

onde $Q(\Omega)$ e $F(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $q(t)$ e $f(t)$, respectivamente. Para determinar o problema de autovalores encontram-se algumas dificuldades adicionais já que, em geral, as matrizes não são simétricas e a matriz de rigidez do primeiro membro da eq. (06) é dependente da frequência de excitação, que pode ser independente da frequência de rotação, Ω_{rpm} . Uma maneira de contornar estas dificuldades é reescrevendo a eq. (06) no espaço de estado. Deste modo, define-se a variável de estado como:

$$Y(\Omega) = \begin{Bmatrix} Q(\Omega) \\ \vdots \\ i\Omega Q(\Omega) \end{Bmatrix}. \quad (07)$$

Então a equação de movimento pode ser escrita da seguinte forma,

$$i\Omega \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm}) & \vdots & \mathbf{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{M} & \vdots & 0 \end{bmatrix} Y(\Omega) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & -\mathbf{M} \end{bmatrix} Y(\Omega) = \begin{Bmatrix} F(\Omega) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (08)$$

ou, de forma mais compacta,

$$[i\Omega \mathbf{A} + \bar{\mathbf{B}}] Y(\Omega) = \{F_y(\Omega)\}, \quad (09)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega_{rpm}) & \vdots & \mathbf{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{M} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\Omega) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & -\mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

O problema de autovetores generalizado, associado a eq. (09) é dado por

$$\mathbf{B}\theta_i = \lambda_i \mathbf{A}\theta_i \quad (11)$$

no qual θ_i é denominado autovetor à direita e λ_i o seu autovalor, com i variando de 1 a n . Considerando que $\mathbf{A}$ e/ou $\mathbf{B}$ são matrizes não simétricas, deve-se resolver o problema de autovalor adjunto, definindo-se o autovetor à esquerda com a variável ψ , ou seja,

$$\mathbf{B}\psi_i = \lambda_i \mathbf{A}\psi_i, \quad (12)$$

onde $i = 1$ a n .

Dada as condições de ortogonalidade apresentadas em EWINS (1984) e FERREIRA (2004), chega-se as seguintes conclusões:

$$\Psi^T \mathbf{A} \Theta = \mathbf{I} \quad e \quad \Psi^T \bar{\mathbf{B}} \Theta = \Lambda, \quad (13)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e Λ é a matriz espectral de autovalores. Como estes autovalores são complexos, podem ser representados pela parte real, δ_j e pela parte imaginária ν_j , ou seja,

$$\lambda_j = \delta_j + i\nu_j. \quad (14)$$

Devido a formulação ser realizada no espaço de estado – com suportes viscoelásticos e portanto matrizes com coeficientes complexos, os autovalores são complexos e diferentes, porém, tem que estar relacionados de alguma forma. Verifica-se assim, que para este tipo de problemas os autovalores estão formados por pares λ_j e $-\lambda_j$. Desta maneira, tomando-se valores de $j \neq k$, mas com $\lambda_j = -\lambda_k$ e aplicando estes valores nas relações de ortogonalidade acima, resultam:

$$\lambda_j^2 = -\frac{\bar{k}_j}{m_j} = -\bar{\Omega}_j^2 = (i\bar{\Omega}_j)^2 \quad (15)$$

e, portanto, $\lambda_j = i\bar{\Omega}_j$. Por definição, tem-se que

$$-\lambda_j^2 = \bar{\Omega}_j^2 = \Omega_j^2(1 + i\eta_j), \quad (16)$$

portanto,

$$\lambda_j = \Omega_j \sqrt{1 + i\eta_j}, \quad (17)$$

onde Ω_j é a frequência natural do sistema e η_j o seu fator de perda.

Destas relações, chega-se a conclusão que:

$$\Omega_j^2 = \text{Re}(-\lambda_j^2), \quad e \quad \eta_j = \frac{\text{Im}(-\lambda_j^2)}{\text{Re}(-\lambda_j^2)}. \quad (18)$$

Resultados e Discussões

Conforme explicitado o problema da determinação da instabilidade em rotores com mancais viscoelásticos ocorre em função do polinômio característico, que resulta na solução do sistema, em autovalores complexos e opostos (ao invés de complexos conjugados). Conforme já explicitado anteriormente, a maneira clássica de determinação da estabilidade decorre do sinal da parte real destes autovalores. Como o par de autovalores tem sinais opostos, a análise clássica não se torna possível.

Para compreender melhor a influência dos autovalores, foram realizadas simulações numéricas de um rotor *Jeffcott* – um sem e outro com valores complexos na matriz de rigidez, que é a principal mudança em um modelo matemático com e sem material viscoelástico. Os autovalores (s) foram representados em um gráfico onde a parte real destes foi colocada no eixo das abscissas e a sua parte imaginária no eixo das ordenadas.

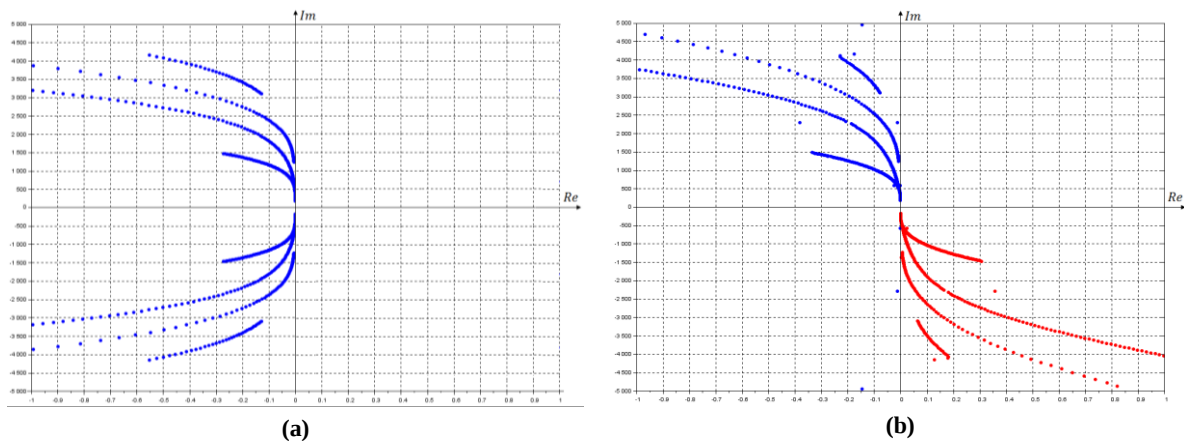


Figura 03 – (a) Modelo com a matriz K ; (b) Modelo com a matriz $\bar{K}$.

Conforme apresentado acima, a fig. 03a está representado os autovalores complexos e conjugados e na fig. 03b os autovalores complexos e opostos. Nota-se uma simetria nas duas figuras, porém a matriz complexa ($\bar{K}$) faz com que os autovalores não se apresentem mais somente no plano esquerdo do eixo imaginário, o que caracterizaria a necessidade de se analisar por outro viés esta questão.

Esta análise gráfica também foi realizada em um modelo numérico real, representando um rotor didático presente no laboratório com suporte com material viscoelástico. O rotor didático apresenta as seguintes características construtivas:

Tabela 01 – Dados do Rotor didático

Componente	Posição [mm]	Comprimento [mm]	Diâmetro [mm]	Material
Eixo	0	365	10	Aço
Disco	300	25	74	Aço
Mancal	0	-	-	Aço+MVE
Mancal	365	-	-	Aço+MVE

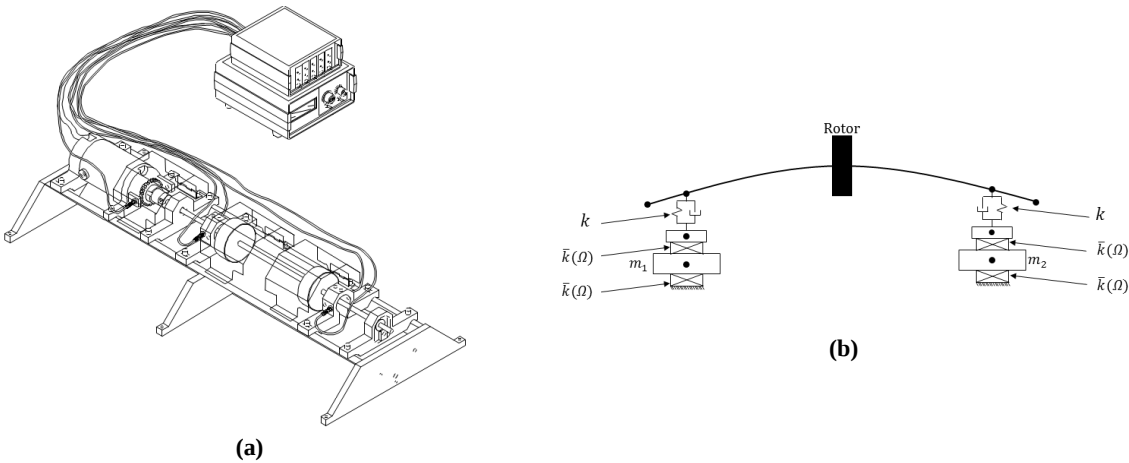


Figura 04 – (a) Rotor didático; (b) Sistema utilizado na modelagem

Verifica-se na fig. 05 que os autovalores se comportam de forma semelhante ao da fig. 04b. Portanto, a proposta apresentada neste trabalho é acompanhar a resolução dos autovalores e verificar o comportamento de sua parte real até que este valor se aproxime de cruzar o eixo imaginário. Partindo da premissa que em rotação zero o sistema é estável, no momento em que o autovalor muda do plano esquerdo para o direito ou vice-versa, o sistema girante se torna instável.

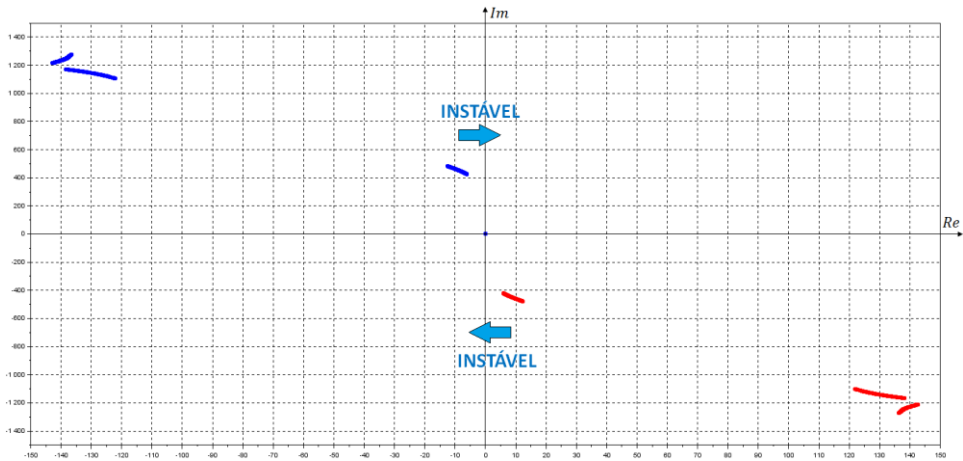


Figura 05 – Plotagem de autovalores em um rotor modelado com MVE

Conclusões

Neste trabalho, foi proposta e implementada numericamente uma metodologia simples para determinar a instabilidade de sistemas girantes compostos com material viscoelástico. Dentre os estudos de instabilidade, o que melhor se adapta para este problema é verificar se a parte real dos coeficientes de Laplace (valor negativo do autovalor) é negativa, sendo neste caso o sistema considerado estável.

Foram revisados conceitos que mostram que as características dinâmicas desses materiais, provoca que a matriz de rigidez global do sistema em estudo seja complexa, função da frequência e da temperatura. Assim, pelas características do sistema, a equação de movimento deve ser equacionada no espaço de estado, em um ambiente $2n$ dimensional com redundância de informação, obtendo-se autovalores complexos e seu negativo complexo. Com isto, a metodologia tradicional se torna inadequada, uma vez que no computo numérico é impossível saber quem é o autovalor e quem o seu negativo, muito menos saber quando essa troca acontece, momento em que o sistema se torna instável.

A proposta deste trabalho foi baseada no acompanhamento da parte real dos autovalores do sistema, partindo da premissa que em rotação zero o sistema é estável. Desta forma, a metodologia implementada permite, de forma simples, determinar a rotação para a qual o sistema se torna instável, através da observação da representação da parte real dos autovalores no plano s de Laplace. Um exemplo numérico foi implementado em Scilab, demonstrando a eficácia da metodologia em identificar a instabilidade em estudos de dinâmica de rotores compostos com materiais viscoelásticos.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro concedido pelo PRH-24 – Programa Interdisciplinar em Engenharia de Petróleo e Gás Natural da Universidade Federal do Paraná. O pesquisador Carlos Alberto Bavastri agradece ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Referências Bibliográficas

CRANDALL, S. H. The role of damping in vibration theory. **Journal of Sound and Vibration**, 11(1), 3–18. 1970.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice, and Application**. Research Studies Press Ltd. 1ª Edição. 1984.

FERREIRA, Euda Mara da Silva. **Modelos de rotores dinâmicos com mancais flexíveis utilizando material viscoelástico**. 2004. 54f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Setor de Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2004.

GAUL, L. The influence of damping on waves and vibrations. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 13(1), 1–30. 1999.

GENTA, Giancarlo. **Dynamics of Rotating Systems**, New York: Springer Science+Business Media Inc, 2005.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**, New York: John Wiley & Sons Ltd, 1990.

RIBEIRO, E. A.; PEREIRA, J. T.; BAVASTRI, C. A. Passive vibration control in rotordynamics: Optimization of composed support using viscoelastic materials. **Journal of Sound and Vibration**, 351, 43–56. 2015.