

9º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



9º CONGRESSO
Brasileiro de P&D em
PETRÓLEO E GÁS

Maceió, AL
de 09 a 11 de novembro
2017

Realização:



ABPG
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE P&D EM
PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POROELÁSTICOS

AUTORES:

Lucíolo Victor Magalhães e Silva¹; Jonathan Teixeira da Cunha²; Leonardo José do Nascimento Guimarães.³

INSTITUIÇÃO:

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE^{1,2,3}

Este Trabalho foi preparado para apresentação no 8º Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás - 9º PDPETRO, realizado pela Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás - ABPG, no período de 09 a 11 de novembro de 2017, em Maceió/AL. Esse Trabalho foi selecionado pelo Comitê Científico do evento para apresentação, seguindo as informações contidas no documento submetido pelo(s) autor(es). O conteúdo do Trabalho, como apresentado, não foi revisado pela ABPG. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões da Associação Brasileira de P&D em Petróleo e Gás. O(s) autor(es) tem conhecimento e aprovação de que este Trabalho seja publicado nos Anais do 9º PDPETRO.

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS POROELÁSTICOS

Abstract

In this work, we will present a code, developed in MATLAB, which was derived in the framework of Biot's consolidation theory. The mathematical model were defined, including mass conservation of fluid, Darcy's law for velocity, and force equilibrium of solid skeleton, over assumption of plane stress conditions. The system of equations is solved in a fully coupled manner. The code was validated the using benchmark problems, including the consolidation problems of Terzaghi and matching numerical solutions with the analytical solutions and ABAQUS for heterogeneous and anisotropic poromechanical effects, which are usually found in the physical phenomena studies in reservoir geomechanics

Introdução

A poromecânica, ciência responsável pelo desenvolvimento de teorias que explicam o comportamento hidro-mecânico de meios porosos, é a área de atuação responsável pela predição do comportamento mecânico de reservatórios petrolíferos durante suas operações, sejam de injeção ou de produção de óleo ou gás. As formulações que regem os fenômenos hidro-mecânicos podem ser resolvidas de diferentes formas, e usualmente são classificadas de acordo com a forma e a sequência com que as equações governantes são resolvidas. Com o desenvolvimento da ciência essas formulações são atualmente implementadas em softwares ou códigos em computadores digitais. A própria natureza dos problemas envolvendo a física dos reservatórios de petróleo encontrados na natureza é determinante no uso de tais ferramentas, tendo em vista as condições de geométricas e dimensionais e composições de materiais a partir de formações anisotrópicas e heterogêneas, tornam o cálculo analítico manual tedioso e impraticável.

Devido à importância dos problemas poromecânicos para a engenharia de reservatórios e as considerações acerca das formas de solução desses problemas, esse trabalho consiste na implementação de um código computacional que resolve, utilizando uma formulação numérica apresentada na literatura, problemas poroelásticos, em que as deformações do meio se desenvolvem em níveis de tensões elásticas.

Metodologia

Para a obtenção das equações que regem os problemas poroelásticos, objetos de estudo desse trabalho, foi utilizada a teoria de Biot (Biot, 1941), tal como apresentada nos trabalhos de Kochen e Décio (1983). Maurice Anthony Biot foi um engenheiro e cientista belga que, a partir de uma série de trabalhos, desenvolveu uma teoria que explica o comportamento hidro-mecânico de meios porosos. A teoria de Biot é aceita, atualmente, pela comunidade científica, como uma teoria consolidada para a modelagem de problemas poroelásticos tridimensionais. O problema de fluxo associado é regido pela lei de Darcy, que se materializa como uma equação constitutiva que descreve as relações entre o fluxo do fluido e o gradiente de pressões de fluido. Para a obtenção da formulação específica para o presente trabalho foram consideradas as seguintes simplificações:

- Meio e fluxo isotérmicos;
- Fluxo laminar e monofásico;
- Fluido homogêneo;

- Carregamento quase-estático;
- Meio sujeito ao regime de Pequenas Deformações;
- Problema mecânico regido pelo Estado Plano de Deformações;
- Meio elástico linear;

Fazendo uso das simplificações, as equações que regem o problema poroelástico tomam a forma apresentada abaixo

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \underline{\underline{\sigma}}' + \underline{\underline{b}} = 0, \text{ onde } \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - Ip, \text{ onde } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \bar{\nabla} \cdot (\underline{\underline{v}}) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 0, \text{ onde } \underline{\underline{v}} = -\underline{\underline{\kappa}} \frac{\bar{\nabla} p}{\gamma_f} \end{cases} \quad (1)$$

sendo $\underline{\underline{\sigma}}'$ e $\underline{\underline{\sigma}}$, respectivamente, os tensores de tensões efetivas e tensões totais. O vetor $\underline{\underline{\varepsilon}} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]$ é o vetor de deformações do material. A pressão de fluido é dada por p e a variável temporal por t . A matriz constitutiva do comportamento mecânico do material é dada por $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{b}}$ é o vetor de forças de corpo atuantes no domínio. A velocidade de Darcy é dada por $\underline{\underline{v}}$, o tensor de permeabilidades por $\underline{\underline{\kappa}}$ e o peso específico do fluido avaliado por γ_f . É definida, como I , a matriz identidade de ordem 2.

Para a obtenção da forma discreta das equações correspondentes à Teoria de Biot foi utilizada uma formulação mista do Método dos Elementos Finitos (MMEF). Esse método tem se mostrado, ao longo da evolução da mecânica computacional e entre diversos outros métodos discretos de solução de equações diferenciais, bastante promissor para a solução de diversos problemas físicos e em particular os problemas poroelásticos. A discretização do domínio é realizada com elementos triangulares. De acordo com Zienkiewicz e Taylor (2005), devido às restrições inf-sup, relacionadas às condições de Babuska-Necas-Brezzi, necessárias para a manutenção da estabilidade do método, a ordem das funções interpoladoras das variáveis mecânicas deve ser maior do que a utilizada para as variáveis hidráulicas. A aproximação das variáveis mecânicas é realizada utilizando funções interpoladoras construídas a partir de um triângulo com seis nós, onde os vértices desse triângulo coincidem com os três pontos onde são interpoladas as variáveis hidráulicas do problema. Sendo assim a aproximação das variáveis hidráulicas é feita de maneira linear e as mecânicas quadráticas.

A Figura 1 (a) e a Figura 1 (b) apresentam, respectivamente, um esquema dos deslocamentos e pressões que são utilizados na interpolação das variáveis mecânicas e hidráulicas

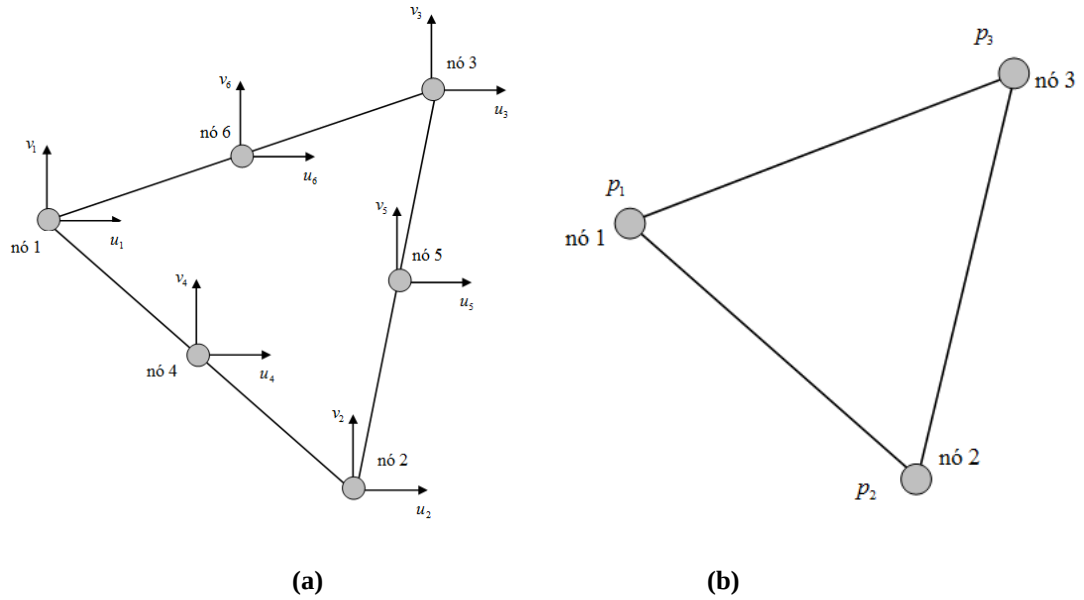


Figura 1. Variáveis nodais utilizadas nas funções de interpolação: (a)Mecânicas; (b)Hidráulicas.

Aplicando o Método dos Resíduos ponderados ao sistema de equações apresentado na Equação (1), tomando as funções pesos como sendo as funções interpoladores de cada variável especificada de acordo com a Figura 1 e manipulando algebricamente as equações a fim de obter a formatação de equações aproximadas pelo Método dos Elementos Finitos, pode-se escrever o problema, de maneira discreta como:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & \underline{\underline{\mathbf{L}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{U}}}}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{P}}}}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{H}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{U}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{P}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{ext} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo as matrizes, ditas globais, do problema iguais a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{K}}} &= \sum_{\text{elementos}} \underline{\underline{\mathbf{k}}} = \sum_{\text{elementos}} \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u dV \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}} &= \sum_{\text{elementos}} \underline{\underline{\mathbf{l}}} = \sum_{\text{elementos}} \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_u^T \underline{\underline{\mathbf{m}}} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p dV \\ \underline{\underline{\mathbf{H}}} &= \sum_{\text{elementos}} \underline{\underline{\mathbf{h}}} = - \sum_{\text{elementos}} \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_p^T \frac{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}{\gamma_w} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_p dV \end{aligned} \quad (3)$$

e os vetores independentes dados por

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} &= \sum_{\text{elementos}} \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \sum_{\text{elementos}} - \int_{S^e} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_p^T q dS + \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_p^T \frac{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}{\gamma_w} \underline{\underline{\mathbf{B}}}_p \underline{\underline{\mathbf{b}}}_w dV \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{ext} &= \sum_{\text{elementos}} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^{ext} = \sum_{\text{elementos}} \int_{S^e} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_u^T \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{t}}}}{\partial t} dS - \int_{V^e} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_u^T \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{b}}}}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (4)$$

As matrizes $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_p$ e $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_u$ são, respectivamente as matrizes compostas pelas funções interpoladoras das variáveis hidráulicas e mecânicas. Os gradientes dessas matrizes são dados por $\underline{\underline{\mathbf{B}}}_p$

e $\underline{\underline{B}}_u$. As variáveis de integração volumétrica e superficial são dadas, respectivamente por V e S . Os fluxos distribuídos ao longo do domínio são dados pelo vetor $\underline{\underline{b}}_w$, $\underline{\underline{t}}$ corresponde ao vetor contendo os carregamentos nos contornos do domínio, q é o fluxo de Darcy e $\underline{\underline{m}}$ é dado por $\underline{\underline{m}} = [1 \ 1 \ 0]$. Maiores detalhes dessa formulação podem ser encontrada em Abbo e B.Math (1997).

A discretização temporal foi realizada aplicando aos operadores diferenças uma formulação do Método das Diferenças Finitas, denominada no trabalho de Abbo e B.Math (1997) de Método θ .

Resultados e Discussão

Para a validação do código computacional desenvolvido serão apresentados dois exemplos que possuem soluções analíticas. O primeiro exemplo consiste no problema poroelástico unidimensional e tem como objetivo a avaliação da formulação na capacidade da reprodução de sua solução analítica, tendo em vista que é um problema poroelástico trivial. Também será apresentado uma análise do comportamento do código submetido a um problema heterogêneo e anisotrópico, tendo em vista que essas condições são rotineiramente encontradas em problemas de geomecânica de reservatórios não-convencionais.

Coluna Poroelástica Homogênea e Isotrópica – Problema de Terzaghi

Esse problema foi proposto por Terzaghi (1923) e até hoje é utilizado por cientistas e engenheiros geotécnicos interessados no comportamento de diversos tipos de problema da prática de engenharia. O problema consiste em uma coluna poroelástica onde no seu topo é submetido um carregamento f , constante ao longo do adensamento. Os deslocamentos, na base da coluna, são nulos e ocorre uma condição de impermeabilidade. Para a simulação, nas arestas laterais do domínio são consideradas as condições usuais de simetria com deslocamentos horizontais nulos e arestas impermeáveis. A malha computacional utilizada é apresentada na Figura 2.



Figura 2. Malha computacional utilizada para o Problema de Terzaghi.

Para as análises foram definidos os fatores tempos, valores usuais utilizados na poroelasticidade, que são definidos de acordo com as características físicas e geométricas de cada problema, com o intuito de adimensionalizar as simulações facilitando analogias entre problemas de magnitudes e características diferentes. O fator tempo para o problema de Terzaghi é dado por

$$T_v = \frac{tc_v}{H^2} \quad (5)$$

onde H é a altura da coluna e c_v o coeficiente de consolidação, dado por

$$c_v = \frac{k_y E (1 - \nu)}{\gamma_w (1 + \nu) (1 - 2\nu)} \quad (6)$$

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos com o código desenvolvido e a solução analítica, dada por Terzaghi (1923). São apresentados os valores de pressões de fluido ao longo da altura da coluna.

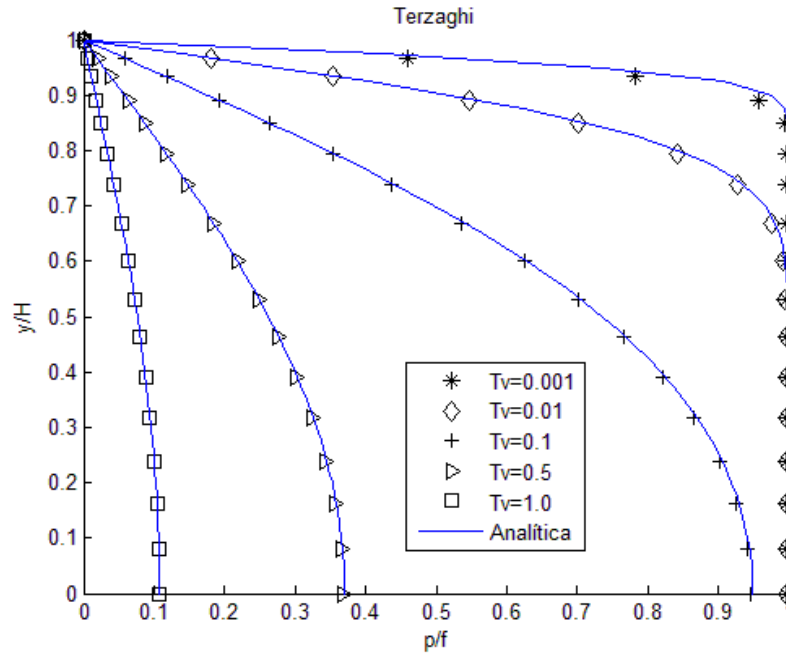


Figura 3. Soluções analíticas e numéricas para o Problema de Terzaghi.

Consolidação Bidimensional de Meio Poroelástico Heterogêneo e Anisotrópico – Consolidação de Solo Estratificado Sobre Carregamento de Fundação

Esse exemplo, proposto por Ai, Z. Y et. al. (2012) tem características que são intrínsecas aos problemas de reservatórios não-convencionais. Tais características são as camadas estratificadas, materializando a heterogeneidade do meio, que se manifesta tanto mecanicamente como hidraulicamente, como a anisotropia hidráulica, onde os valores de permeabilidades nas direções coordenadas possuem valores de até ordem de grandezas de diferença.

As condições de contorno do problema são as seguintes: Em Γ_1 há um carregamento constante, ao longo do adensamento de valor f . Em Γ_2 a pressão é nula e não há carregamentos. As arestas quem defines Γ_3 são mantidas à pressão nula e deslocamentos horizontais nulos. Os contornos Γ_4 e Γ_5 possuem condição de impermeabilidade e, respectivamente, deslocamentos verticais e horizontais nulos. Os domínios são definidos de acordo com a Figura 4.

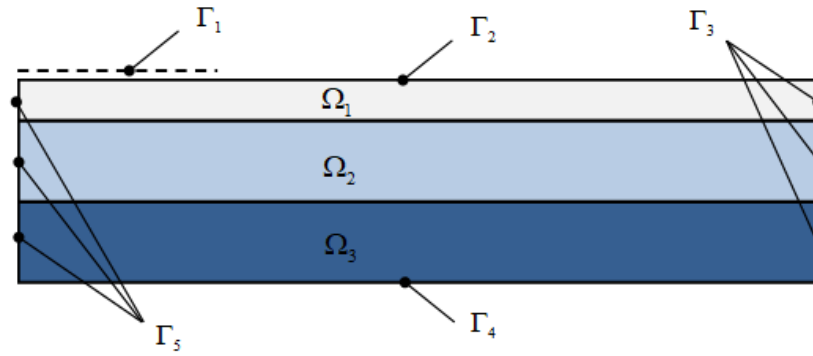


Figura 4. Contornos e domínios do problema.

No trabalho de Ai, Z. Y et. al. (2012) foi desenvolvida uma solução analítica para este problema. Além do resultado analítico, Ai, Z. Y et. al. (2012) obtiveram os resultados de um modelo tridimensional equivalente gerado no ABAQUS. Esses foram comparados com os resultados obtidos pelo código desenvolvido nesse trabalho

Para a apresentação das soluções serão definidos parâmetros de cada camada, onde h_i , G_i , k_{xi} , k_{yi} e ν_i são, respectivamente, a espessura da camada, o módulo de cisalhamento, a permeabilidade vertical, a permeabilidade horizontal e o coeficiente de Poisson da camada i . Cada camada i é associada a um domínio Ω_i . Também é definido o comprimento do contorno Γ_1 que é igual a b , ou seja, é o comprimento da camada onde está sendo aplicada a carga.

O fator tempo, que possui um conceito semelhante ao apresentado para o problema de Terzagui, é dado por.

$$T_v = \frac{2G_1 k_{z1} t}{\gamma_w b^2}$$

Para esse problema, foram avaliados, assim como para o caso de referência Ai, Z. Y et. al. (2012) três cenários, correspondentes ao fator tempo $T_v = 0,05$. Os cenários se diferem pela razão de anisotropia hidráulica, r , definida como a relação entre a permeabilidade vertical e horizontal das camadas de solo ($r = k_{xi}/k_{xz}$). Essa razão será aplicada às três camadas simultaneamente em cada caso analisado e terá valores iguais a 1, 5 e 50. Para o caso avaliado $h_1 : h_2 : h_3 = 1 : 2 : 2$ e $h_1 + h_2 + h_3 = b$. Os módulos de Poisson das camadas serão iguais e dados por $\nu = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,20$. A heterogeneidade em termos mecânicos é dada pela razão $G_1 : G_2 : G_3 = 1 : 2 : 4$ e em termos hidráulicos por $k_{h1} : k_{h2} : k_{h3} = 4 : 2 : 1$.

A malha computacional utilizada para a obtenção dos resultados é apresentada na Figura 5, e a solução analítica apresentada nas próximas análises, consiste da pressão de fluido no contorno esquerdo do domínio.

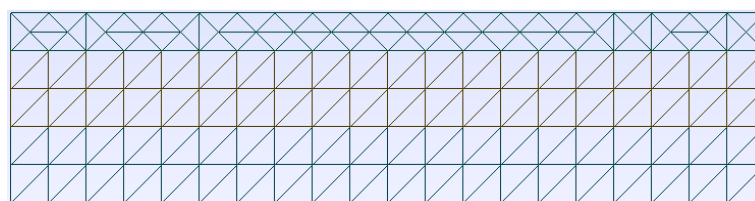


Figura 5. Malha coputacional do problema.

As Figuras 6, 7 e 8 apresentam, respectivamente, os resultados para cada modelo avaliado. Cada figura representa um valor de razão de anisotropia hidráulica, sendo iguais a 1, 5 e 50. De acordo com o observado nesses resultados, os obtidos pelo código desenvolvido se matem com valores intermediários entre a solução analítica Ai, Z. Y et. al. (2012) e a solução do ABAQUS.

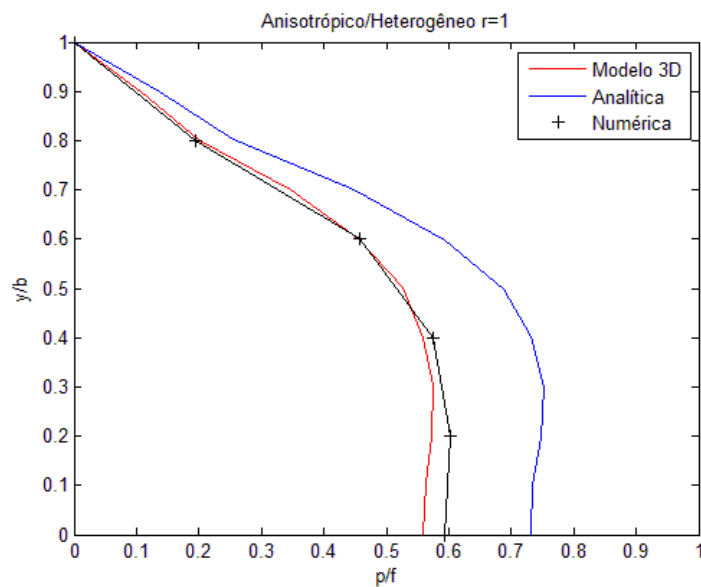


Figura 6. Resultados com $r=1$.

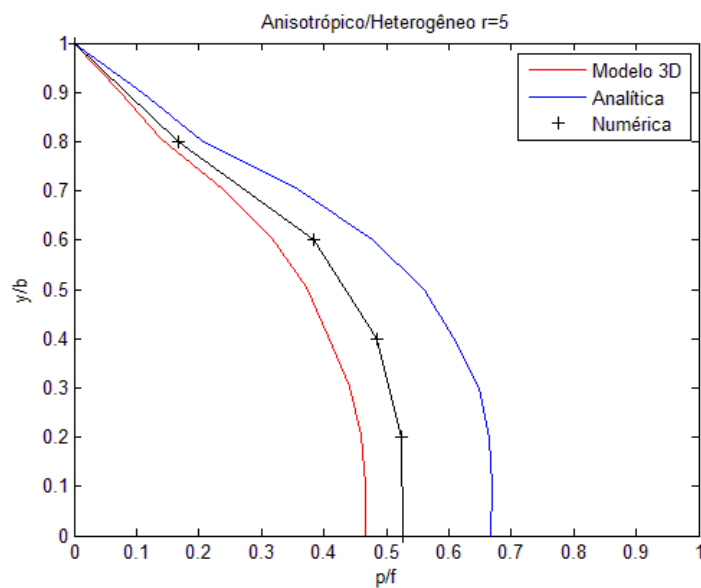


Figura 7. Resultados com $r=5$.

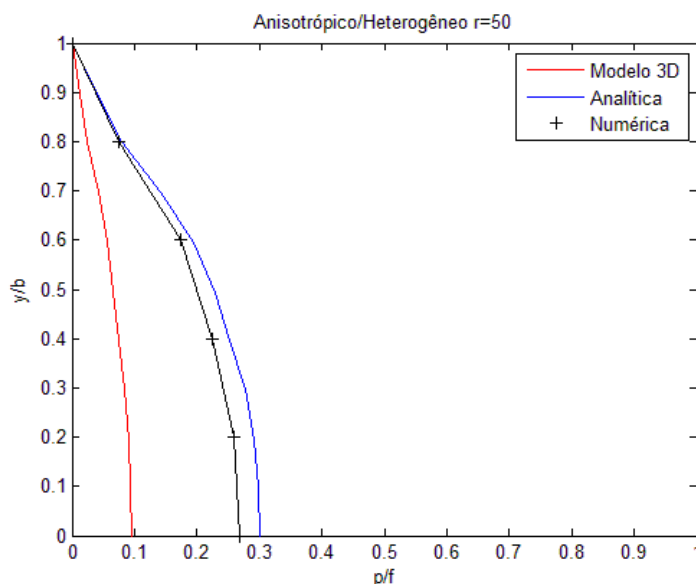


Figura 8. Resultados com $r=50$.

Conclusões

De acordo com os resultados apresentados pode-se observar que o código analisado é capaz de resolver problemas poromecânicos com resultados satisfatórios quando se leva em consideração as características dos problemas avaliados. Para o problema de Terzaghi os resultados analíticos e numéricos se apresentaram considerável concordância. Em relação ao problema anisotrópico e heterogêneo os valores numéricos se mantiveram praticamente entre os dois modelos de referência. As diferenças encontradas são inerentes às condições aplicadas a cada formulação, seja ela numérica (ABAQUS) ou analítica dada por Ai, Z. Y et. al. (2012).

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e ao Laboratório Computacional de Métodos Computacionais em Geomecânica (LMCG) pelo apoio, incentivo e disponibilidade de recursos físicos e pessoais e ao CENPES/Petrobrás pelo investimento financeiro atribuído aos pesquisadores.

Referências Bibliográficas

ABAQUS.(s.d). Acesso em 28 de Agosto de 2017, disponível em : <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>

Analytical Layer-element Solutions of Biot's Consolidation With Anisotropic Permeability And Incompressible Fluid And Solids Constituents 2012 Appliead Mathematical Modelling 4817-4829

Conceitos Básicos da Teoria Tridimensional do Adensamento 1983 Solos e Rochas v.6, n.2, p 3-19

Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus Dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen Akademie der Wissenschaften in Wien 1923 Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse vol. 132, p. 125-138.

Finite Element Method: Is Basis and Fundamental. 6 ed. 2005 Londres Published Elsevier

General Theory Of Three-dimensional Consolidation 1941 Journal of Applied Physics vol.12, n.2, p. 155-164

